کتاب درسی نظریه گراف

بالاکریشنان و رانگاناتهان

(حل تعدادی از تمرین‌های فصل‌های ۲ و ۳)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

خوانندگان گرامی در صورتی که برای یک مساله حل دیگری دارید، یا حل مساله‌ای ایراد دارد، یا حل داده شده برای یک مساله مبهم است، یا برای مساله‌ای که حل آن نیامده راه حلی دارید، لطفاً با اینجانب تماس بگیرید.

web: http://taeri.iut.ac.ir

e-mail: b.taeri@cc.iut.ac.ir

تاریخ آخرین ویرایش: هفتم شهریور ۱۳۹۲

فصل ۳

گراف‌های جهت‌دار

تمرین ۱.۱ تعداد جهت‌دهی‌های یک گراف ساده با n راس چیست؟

حل یک یال دلخواه را می‌توان به دو صورت جهت‌دهی کرد. بنابراین تعداد جهت‌دهی‌ها برابر ۲^m است، که در آن m تعداد یال‌ها است.

تمرین ۱.۲ فرض کنید D یک دی‌گراف بدون دور جهت‌دار باشد. ثابت کنید که یک راس با درجه ورودی ۰ وجود دارد. نتیجه بگیرید که ترتیبی از V به صورت $v_۱$، $v_۲$، ...، v_n، وجود دارد، به طوری که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، راس ابتدایی هر کمان D با راس انتهایی v_i در مجموعه‌ی $\{v_۱, v_۲, \dots, v_i\}$ قرار دارد.

حل طولانی‌ترین مسیر جهت‌دار $w_۱ \to w_۲ \to \cdots \to w_m$ در D را در نظر می‌گیریم. در این صورت هیچ کمانی به $w_۱$ وارد نمی‌شود، زیرا اگر کمانی از یکی از w_iها به $w_۱$ وارد شود، آن‌گاه یک دور جهت‌دار در D به دست می‌آید؛ و اگر کمانی از راس‌های دیگر به $w_۱$ وارد شود، آن‌گاه مسیری طولانی‌تر در D به دست می‌آید. از این‌رو $d^-(w_۱) = ۰$ اکنون اگر $d^-(v_r) = ۰$، آن‌گاه قرار می‌دهیم $D_۱ = D - v_۱$ با استفاده از استقرا ترتیبی از $V(D_۱)$ به صورت $v_۱$، $v_۲$، ...، $v_{n-۱}$ وجود دارند که راس ابتدایی هر کمان با راس v_i در مجموعه‌ی $\{v_۱, \dots, v_{i-۱}\}$ قرار دارد.

تمرین ۲.۱ نشان دهید که هر تورنمنت T یا دی‌همبند است یا می‌توان آن‌را با جهت‌دهی فقط یکی از کمان‌های T آن‌را دی‌همبند کرد.

حل طبق قضیه‌ی ۲.۲.۱، مسیر جهت‌دار $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ در T وجود دارد. اکنون اگر $v_n \to v_1$، آن‌گاه T دی‌همبند است و اگر $v_1 \to v_n$، آن‌گاه با تعویض جهت این کمان، T دی‌همبند خواهد شد.

تمرین ۲.۲ نشان دهید که یک تورنمنت دی‌همبند است اگر و تنها اگر دارای یک دور جهت‌دار فراگیر باشد.

حل اگر یک تورنمنت دارای یک دور جهت‌دار فراگیر باشد، آن‌گاه به وضوح دی‌همبند است. برعکس فرض کنید T یک تورنمنت دی‌همبند با n راس باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی ۲.۲.۲ یک n–دور جهت‌دار در T وجود دارد، که قطعاً دور فراگیر جهت‌دار است.

تمرین ۲.۳ نشان دهید که هر تورنمنت مرتبه‌ی n دارای حداکثر یک راس v با $d^+(v) = n - 1$ است.

حل اگر راس v با $d^+(v) = n - 1$ وجود داشته باشد، آن‌گاه از v به همه‌ی راس‌های دیگر از V کمان وجود دارد. از این‌رو به ازای هر راس دیگر w داریم $d^-(w) \geq 1$ و در نتیجه

$$n - 1 = d(w) = d^-(w) + d^+(w) \geq 1 + d^+(w).$$

پس $d^+(w) \leq n - 2$.

تمرین ۲.۴ نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح مثبت $n \geq 3$، یک تورنمنت همیلتونی مرتبه‌ی n وجود دارد.

حل گراف K_n را به طریق دلخواهی جهت‌دار می‌کنیم. طبق قضیه‌ی ۲.۲.۱ مسیر همیلتونی جهت‌دار وجود دارد. حتی می‌توان طبق تمرین ۲.۱ آن‌را دی‌همبند کرد.

تمرین ۲.۵ نشان دهید که اگر یک تورنمنت شامل یک دور جهت‌دار باشد، آن‌گاه

شامل یک دور جهت‌دار به طول ۳ است.

حل فرض کنید $v_۱ \to v_۲ \to \cdots \to v_m \to v_۱$ دور جهت دار باشد. اگر $v_۳ \to v_۱$، آن‌گاه می‌توان با حذف $v_۲$ یک دور جهت‌دار با طول کوتاه‌تر به‌دست آورد و همین استدلال را برای دور جدید انجام داد. پس فرض کنید $v_۱ \to v_۳$ در این صورت $v_۱ \to v_۲ \to v_۳ \to v_۱$ یک دور جهت‌دار به طول ۳ است.

تمرین ۲.۶ نشان دهید که هر تورنمنت T شامل یک راس v است به طوری که هر راس دیگر T توسط v با یک مسیر جهت‌دار حداکثر به طول ۲ قابل دسترسی است.

حل راس x در T را در نظر می‌گیریم. اگر x دارای خاصیت مورد نظر نباشد، آن‌گاه راس y وجود دارد که از x با مسیر به طول ۲ قابل دسترس نیست. چون T یک جهت‌دهی از K_n است، پس همسایه‌ی خروجی x باید یک همسایه‌ی خروجی y باشد، یعنی اگر $x \to v$ یک کمان باشد، آن‌گاه $y \to v$ نیز یک کمان است. علاوه بر آن باید داشته باشیم $y \to x$ پس $d^+(y) > d^+(x)$ اکنون اگر y دارای خاصیت مورد نظر نباشد، آن‌گاه با استفاده از روند بالا راس z وجود دارد که $d^+(z) > d^+(y) > d^+(x)$ و می‌توان این فرایند را ادامه داد. چون T متناهی است این روند متوقف می‌شود و سرانجام به یک راس خواهیم رسید که به تمامی راس‌های دیگر با مسیری به طول حداکثر ۲ قابل دسترسی است.

تمرین ۳.۱ اگر $|V_i| = n_i$، $۱ \leq i \leq k$، تعداد یال‌های گراف چندبخشی کامل $G(V_۱, V_۲, \ldots, V_k)$ را بیابید. (صفحه‌ی ۶ از مرجع [۱۹] را ببینید.)

حل فرض کنید $۱ \leq i \leq k$، تعداد یال‌های بین V_i و بخش‌های دیگر برابر

$$n_i \sum_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{n} n_j$$

است. از این‌رو تعداد یال‌های گراف چندبخشی کامل $G(V_۱, V_۲, \ldots, V_k)$ برابر است با

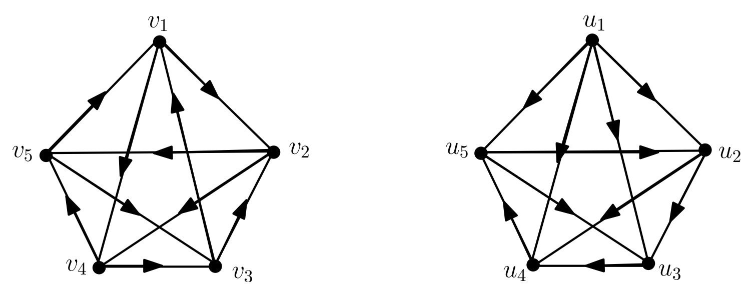
$$\frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{k} \sum_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{k} n_j = \sum_{۱ \leq i < j \leq k} n_i n_j.$$

تمرین ۳.۴ تعریفی مشابه یکریختی گراف‌ها برای یکریختی دی‌گراف‌ها ارائه کنید.

حل فرض کنید $G = (V(G), A(G), I_G)$ و $H = (V(H), A(H), I_H)$ دو گراف جهت‌دار باشند. یکریختی دی‌گرافی از G به H زوج (ϕ, θ) است، که در آن $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ و $\theta : A(G) \longrightarrow A(H)$ تابع‌های دوسویی با این خاصیت هستند که $I_G(e) = (u, v)$ اگر و تنها اگر $I_H(\theta(e)) = (\phi(u), \phi(v))$.

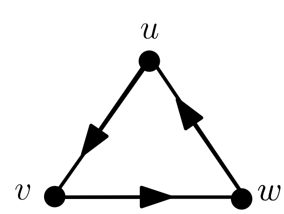
تمرین ۳.۵ مثالی از دو تورنمنت غیر یکریخت روی پنج راس بزنید. پاسخ خود را توجیه کنید.

حل در گراف سمت چپ به ازای هر i داریم $d^+(v_i) = ۲$ در حالی که در گراف سمت راست داریم $d^+(u_۱) = ۰$. پس دو تورنمنت یکریخت نیستند.



تمرین ۳.۶ اگر u و v دو راس متمایز یک تورنمنت T باشند به طوری که $d(u, v)$ و $d(v, u)$ تعریف شده باشند (که در آن $d(u, v)$ نشان دهنده‌ی طول کوتاه‌ترین (u, v)-مسیر جهت‌دار در T است)، آنگاه نشان دهید که $d(u, v) \neq d(v, u)$.

حل باید یک مثال نقض بیابیم. به عنوان مثال فرض کنید $V(T) = \{u, v, w\}$ و $A(T) = \{(u, v), (v, w), (w, u)\}$. در این صورت $d(u, v) = ۱$ و $d(v, u) = ۲$. (شکل زیر را ببینید).



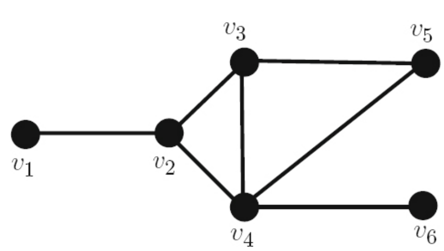
فصل ۴

همبندی

تمرین ۱.۱ اگر $\{x, y\}$ یک برش ۲-یالی از گراف G باشد، نشان دهید که هر دور در G که شامل x باشد باید شامل y نیز باشد.

حل بدیهی است که باید فرض کنیم $\{x, y\}$ برش یالی می‌نیمم است. فرض کنید x به یک دور C متعلق باشد. باید نشان دهیم که y نیز به دور C تعلق دارد. فرض کنید چنین نباشد. گراف همبند $G_۱ = G - x$ را در نظر می‌گیریم. چون $G - \{x, y\} = G_۱ - y$ ناهمبند است، پس y یک یال برشی از $G_۱$ است. پس y به هیچ دوری از $G_۱$ متعلق نیست. چون y به C نیز تعلق ندارد، پس y به هیچ دوری از G متعلق نیست. پس y یال برشی از G است، که تناقض است.

تمرین ۲.۱ راس‌ها برشی و یال‌های برشی شکل ۲.۳ را بیابید:



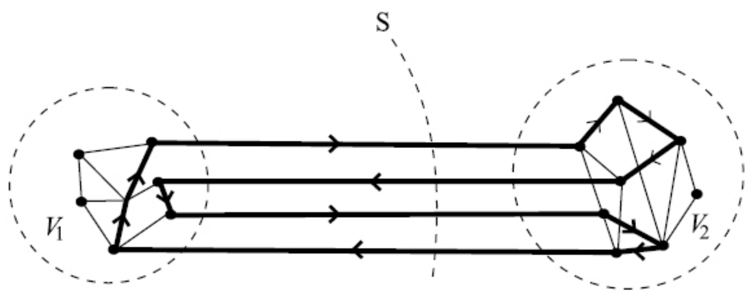
حل راس‌های برشی عبارتند از $v_۲$ و $v_۴$؛ یال‌های برشی عبارتند از $v_۱v_۲$، $v_۴v_۶$.

تمرین ۱.۳ اثبات یا رد کنید: فرض کنید G یک گراف ساده و همبند با $n(G) \geq ۳$ باشد. در این صورت G دارای یال برشی است اگر و تنها اگر دارای راس برشی باشد.

حل این حکم درست نیست. به عنوان مثال اجتماع دو ۳-دور که در یک راس مشترک باشند، یک گراف با راس برشی است که یال برشی ندارد.

تمرین ۱.۴ نشان دهید که در یک گراف، تعداد یال‌های مشترک در یک دور و یک برش یالی عددی زوج است.

حل فرض کنید G یک گراف و S یک برش یالی از G باشد. فرض کنید حذف S از مجموعه راس G را به دو مجموعه‌ی مجزای $V_۱$ و $V_۲$ افراز کند. فرض کنید C یک دور در G باشد (شکل زیر را ببینید، در این شکل دور G را با خطوط ضخیم نشان داده‌ایم که در جهت فلش‌ها طی می‌شود).



اگر همه‌ی راس‌های C در $V_۱$ (یا در $V_۲$) قرار گیرند، آن‌گاه تعداد یال‌های مشترک S و C صفر است، که عددی زوج است. از طرف دیگر اگر برخی از راس‌های C در $V_۱$ و برخی دیگر در $V_۲$ قرار داشته باشند، آن‌گاه هنگامی که C را طی می‌کنیم بین راس‌های $V_۱$ و $V_۲$ به تناوب حرکت می‌کنیم. زیرا به خاطر بسته بودن یک دور، تعداد یال‌های بین $V_۱$ و $V_۲$ باید زوج باشد؛ و چون هر یال S یک پایان در $V_۱$ و یک پایان در $V_۲$ دارد، و یال‌های دیگر G خاصیت جداسازی مجموعه‌های $V_۱$ و $V_۲$ را ندارند، تعداد یال‌های مشترک S و C زوج است.

تمرین ۲.۱ ثابت کنید که در یک گراف ساده با n راس، $n \geq ۲$، کامل است اگر و تنها اگر $\kappa(G) = n - ۱$.

حل ($\Leftarrow$) ابتدا فرض کنید $G = K_n$ گراف کامل باشد. چون K_n یک زیرگراف فراگیر از K_n است، پس طبق تعریف داریم $\kappa(G) = n - ۱$.

($\Rightarrow$) اکنون فرض کنید $\kappa(G) = n - ۱$ و $T = \{v_۲, v_۳, \ldots, v_n\}$ یک برش راسی می‌نیمم باشد. در این صورت $G - \{v_۳, \ldots, v_n\}$ همبند است. پس $v_۱v_۲ \in E(G)$. اکنون چون $G - \{v_۴, \ldots, v_n\}$ همبند راس $v_۳$ یا به $v_۱$ وصل است یا به $v_۲$ فرض کنید مثلاً $v_۲v_۳ \in E(G)$. اکنون چون $G - \{v_۲, v_۴, \ldots, v_n\}$ همبند است داریم $v_۱v_۳ \in E(G)$ و در نتیجه زیرگراف القا شده توسط $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ گراف کامل است. حکم با استفاده از این روند ثابت می‌شود.

تمرین ۲.۲ ثابت کنید که حذف یال‌ها از برش یالی می‌نیمم از یک گراف همبند G منجر به یک گراف ناهمبند با دقیقاً دو مولفه خواهد شد. (توجه کنید که نتیجه‌ی مشابه برای می‌نیمم برش راسی درست نیست.)

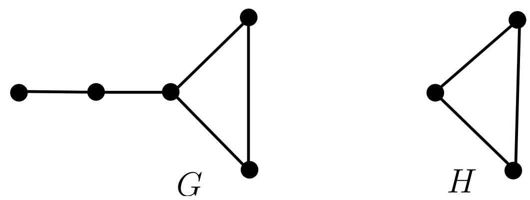
حل ابتدا فرض کنید $e = uv$ یک یال برشی از گراف همبند G باشد. در این صورت $G - e$ ناهمبند است و در نتیجه u و v در مولفه‌های متفاوت $G - e$ قرار می‌گیرند. فرض کنید $G_۱$ مولفه‌ی شامل u و $G_۲$ مولفه‌ی شامل v باشد. چون مولفه‌ها مجزا از هم هستند نتیجه می‌گیریم که $G_۱$ یکتا مولفه شامل u و $G_۲$ یکتا مولفه شامل v است. از این‌رو $G - e$ فقط دارای دو مولفه است. اکنون فرض کنید $\{e_۱, \ldots, e_k\}$، $k \geq ۲$، یک برش یالی می‌نیمم باشد. بنابراین $H = G - \{e_۱, \ldots, e_{k-۱}\}$ همبند است. پس طبق بحث بالا $G - \{e_۱, \ldots, e_{k-۱}, e_k\} = H - e_k$ دقیقاً دو مولفه دارد.

تمرین ۲.۳ اثبات یا رد کنید: اگر H زیرگراف G باشد، آن‌گاه

(الف) $\kappa(H) \leq \kappa(G)$ و

(ب) $\lambda(H) \leq \lambda(G)$.

حل هر دو گزاره نادرست هستند. فرض کنید گراف G و زیرگراف H از آن به صورت زیر باشند:

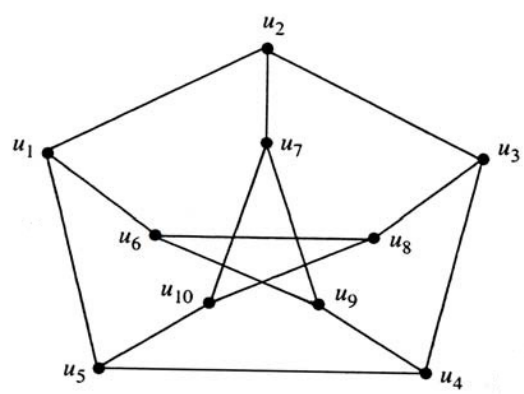


در این صورت $\kappa(H) = ۲ > ۱ = \kappa(G)$ و $\lambda(H) = ۲ > ۱ = \lambda(G)$.

تمرین ۲.۴ $\lambda(K_n)$ را تعیین کنید.

حل چون راس‌های K_n دوبدو مجاور هستند پس برای یافتن یک مجموعه‌ی جداساز می‌نیمم از یال‌ها باید یال‌های مجاور با یک راس مشخص را در نظر بگیریم. از این‌رو اگر $n-۱$ یال متصل به یک راس یک برش یالی می‌نیمم را تشکیل می‌دهند و داریم $\lambda(K_n) = n-۱$.

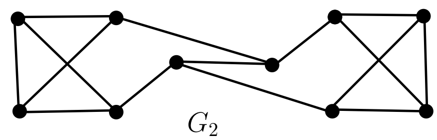
تمرین ۲.۵ همبندی و همبندی یالی گراف پترسن P را تعیین کنید. (گراف P از شکل زیر را ببینید. توجه کنید که P یک گراف مکعبی است.)



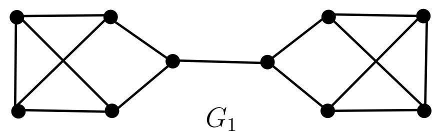
حل داریم $m(P) = ۱۵$، $n(P) = ۱۰$. علاوه بر آن P یک گراف ۳-منتظم است، پس $\Delta = \delta = ۳$. همچنین داریم $\kappa \leq \lambda \leq \delta = ۳$. اکنون $T = \{u_۲, u_۸, u_۴\}$ یک برش راسی P است و P برش ۲-راسی ندارد، پس $\kappa = ۳$ از این‌رو $\lambda = ۳$.

تمرین ۲.۶ مثالی از گراف‌های مکعبی $G_۱$، $G_۲$، و $G_۳$ با $\kappa(G_۱) = ۱$، $\kappa(G_۲) = ۲$، و $\kappa(G_۳) = ۳$ بزنید.

حل گراف‌های G_1 و G_2 در شکل زیر نشان داده شده‌اند. هم‌چنین $G_3 = K_4$ دارای خاصیت مورد نظر است.

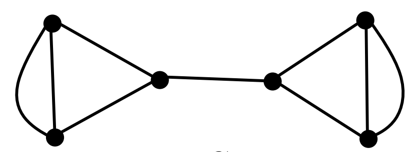


G_2

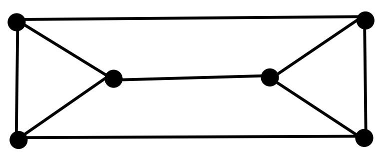


G_1

در شکل زیر مثال‌های دیگری داده شده‌اند.



G_1



G_3

تمرین ۲.۷ (الف) نشان دهید که یک گراف G با حداقل سه راس ۲-همبند است اگر و تنها اگر هر دو یال G در یک دور مشترک قرار داشته باشند.
(ب) نشان دهید که یک گراف G با حداقل سه راس ۲-همبند است اگر و تنها اگر هر راس و هر یال G در یک دور مشترک قرار داشته باشند.

حل ابتدا نشان می‌دهیم که اگر G یک گراف k-همبند و G' گراف به دست آمده از G با اضافه کردن یک راس جدی z و مجاور کردن آن با حداقل k راس از G باشد، آن‌گاه G' گراف k-همبند است. در واقع فرض کنید S یک برش راسی از G' باشد. اگر $z \in S$، آن‌گاه $S - \{y\}$ برش راسی از G است و در نتیجه $|S| \geq k + 1$. اگر $y \notin S$ و $N(z) \subseteq S$، آن‌گاه $|S| \geq k$. در غیر این صورت S برش راسی از G است و مجدداً $|S| \geq k$.

باید فرض $\delta \geq 1$ را در نظر بگیریم، یعنی G دارای راس تنها نباشد.
(الف) ($\Longleftarrow$) فرض کنید $e = wz$ و $f = uv$ دو یال دلخواه در G باشند. دو راس w و z را به G اضافه می‌کنیم، w را به u و v؛ و z را به x و y وصل می‌کنیم. فرض کنید G' گراف به دست آمده از این طریق باشد. طبق مشاهده‌ی بالا G' یک گراف ۲-همبند است. بنابراین طبق قضیه‌ی ویتنی یک دور C' در G' شامل w و z وجود دارد. مسیرهای uwv و xyz را، به ترتیب، با uv و xz جایگزین می‌کنیم و به این طریق دور شامل یال‌های e و f در G را به دست می‌آوریم.

(الف) ($\Longrightarrow$) دو راس دلخواه u و v از G را در نظر می‌گیریم. چون $\delta \geq ۱$، پس یال‌های $e = ux$ و $f = vy$ وجود دارند. طبق فرض یک دور C شامل e و f در G وجود دارد. دور C شامل دو راس u و v است. پس طبق قضیه‌ی ویتنی G گراف ۲-همبند است.

تمرین ۲.۸ ثابت کنید که گراف G، ۲-همبند است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرگراف همبند $G_۱$ و $G_۲$، دو مسیر درونی مجزای $P_۱$ و $P_۲$ از G بین $G_۱$ و $G_۲$ وجود داشته باشد.

حل ($\Longleftarrow$) راس $v_۱$ از $G_۱$ و راس $v_۲$ از $G_۲$ را در نظر می‌گیریم. چون G گراف ۲-همبند است، پس طبق قضیه‌ی ویتنی دو $v_۱ - v_۲$ مسیر درونی مجزای $P_۱$ و $P_۲$ وجود دارند. بنابراین $P_۱$ و $P_۲$ دو مسیر درونی-مجزا بین $G_۱$ و $G_۲$ هستند.
($\Longrightarrow$) هر راس از گراف G را می‌توان به عنوان یک زیرگراف از G در نظر گرفت. دو راس u و v را در نظر می‌گیریم. طبق فرض دو $u - v$ مسیر درونی مجزا وجود دارند. از این‌رو طبق قضیه‌ی ویتنی G گراف ۲-همبند است.

تمرین ۲.۱۰ (الف) با یک مثال نقض رد کنید: اگر $\kappa(G) = k$، آن‌گاه $\kappa(L(G)) = k$.

(ب) ثابت کنید: $\lambda(G) \leq \kappa(L(G))$. مثالی از گراف G بزنید که $\lambda(G) < \kappa(L(G))$.

حل (الف) فرض کنید $G = K_{۱,۳}$. در این صورت داریم $L(G) = K_۳$، $\kappa(G) = ۱$، و $\kappa(L(G)) = ۲$.

(ب) فرض کنید B یک برش راسی می‌نیمم از $L(G)$ باشد. در این صورت B متشکل از یال‌هایی از G است، که حذف آن‌ها G را ناهمبند می‌کند. پس $\lambda(G) \leq |B| = \kappa(L(G))$. برای گراف $G = K_{۱,۳}$ نامساوی اکید رخ می‌دهد.

تمرین ۵.۲ نشان دهید که اگر گراف G یک گراف k-همبند باشد، آن‌گاه $G \vee K_۱$ گراف $(k+۱)$-همبند است.

حل گراف $G' = G \vee K_۱$ یک گراف است که با اضافه کردن یک راس x به G و مجاور ساختن آن با تمامی راس‌های G به دست می‌آید. بنابراین $N(x) = V(G)$. نشان

می‌دهیم که هر دو راس از G' توسط $k+1$ مسیر درونی مجزا متصل می‌شوند؛ و از آنجا حکم از قضیه‌ی ویتنی ثابت است. ابتدا راس x و یک راس از G را در نظر می‌گیریم. فرض کنید u یک راس دلخواه از G باشد. k راس دلخواه $v_1, \dots, v_k \in V(G) \setminus \{u\}$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت $k+1$ مسیر xu، xv_iu، $i = 1, \dots, k$، درونی مجزا هستند و دو راس u و x را در G' به وصل می‌کنند. اکنون دو راس از G را در نظر می‌گیریم. فرض کنید u و v دو راس دلخواه از G باشند. چون G گراف k-همبند است، پس طبق قضیه‌ی ویتنی k مسیر درونی مجزا بین u و v در G وجود دارد. این k مسیر به همراه مسیر uxv تعداد $k+1$ مسیر درونی مجزا از u به v را به دست می‌دهند.

تمرین ۵.۳ فرض کنید S یک مجموعه از راس‌های یک گراف k-همبند با $|S| = k$ باشد. اگر $v \in V \backslash S$، نشان دهید که k مسیر درونی مجزا از v به k راس S وجود دارد. (تبصره: به ویژه، اگر C یک دور به طول حداقل k در G باشد، و $v \in V(G) \backslash V(C)$، آنگاه k مسیر درونی مجزا از v به C وجود دارد.)

حل فرض کنید $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. یک راس w به G اضافه می‌کنیم و w را به تمامی راس‌های v_i، $i = 1, 2, \dots, k$، با یال متصل می‌کنیم تا گراف G' به دست آید. ابتدا ادعا می‌کنیم که گراف G' یک گراف k-همبند است. (در حل تمرین ۲.۷ این مطلب ثابت شد). فرض کنید T یک برش راسی از G' باشد. باید نشان دهیم $|T| \geq k$. دو حالت رخ می‌دهد $w \in T$ یا $w \notin T$. اگر $w \in T$، آنگاه $T \setminus \{w\}$ یک برش راسی از G است و چون G گراف k-همبند است داریم $|T \setminus \{w\}| \geq k$ و بنابراین $|T| \geq k+1$. اکنون فرض کنید $w \notin T$. اگر $N(w) \subseteq T$، آنگاه چون $v_i \in N(w)$ داریم $|T| \geq k$؛ و اگر $N(w) \setminus T \neq \emptyset$، آنگاه $N(w) \setminus T$ به مولفه‌ی یکتای $G' - T$ متعلق است (مولفه‌ی شامل w). از این‌رو T یک برش راسی از G است و چون G گراف k-همبند است داریم $|T| \geq k$.

بنابراین ادعای k-همبند بودن G' ثابت شد. اکنون دو راس v و w را در نظر می‌گیریم. چون G' گراف k-همبند است پس طبق قضیه‌ی ویتنی k مسیر درونی مجزا بین v و w وجود دارد. چون تنها راس‌های مجاور با w راس‌های v_1، ...، v_k هستند، پس این k

مسیر، مسیرهایی از v به v_i در G هستند.

تمرین ۵.۴ **قضیه‌ی دیراک (مرجع [۳۳]):** اگر گراف G یک گراف k-همبند ($k \geq ۲$) باشد، آنگاه هر مجموعه متشکل از k راس از G روی یک دور قرار دارند. (توجه: ممکن است دور علاوه بر این k راس شامل راس‌های دیگری نیز باشد.)

حل به استقرا روی k عمل می‌کنیم. حالت $k = ۲$ همان قضیه‌ی ۳.۲۸ است. اکنون فرض کنید حکم برای k درست باشد و G یک گراف $(k + ۱)$ـهمبند، و $\{v_۱, v_۲, \dots, v_k, v_{k+۱}\}$ مجموعه‌ای متشکل از $k + ۱$ راس از G باشد. طبق تمرین قبل k مسیر درونی مجزا از $v_{k+۱}$ به $v_۱$، $v_۲$، ...، v_k وجود دارند. اکنون طبق فرض استقرا $v_۱$، $v_۲$، ...، v_k روی یک دور C از G قرار دارند. بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم $C: \ v_۱v_۲ \cdots v_kv_۱$. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنید $V(C) = \{v_۱, v_۲, \dots, v_k\}$. در این حالت فرض کنید P مسیر بین $v_۱$ و $v_{k+۱}$؛ Q مسیر بین v_k و $v_{k+۱}$ باشد. در این صورت بخش $v_k - v_۱$ C به همراه Q و به همراه P یک دور شامل $k + ۱$ راس v_i، $i = ۱, \dots, k + ۱$ است.

حالت دوم: فرض کنید $V(C) \supsetneqq \{v_۱, v_۲, \dots, v_k\}$. در این حالت چون G یک گراف $(k + ۱)$-همبند است، راس‌های پایانی دو تا از $k + ۱$ مسیر درونی-مجزا از $v_{k+۱}$ به C باید به یکی از k مسیر بسته‌ی $[v_i, v_{i+۱}]$، $۱ \leq i \leq k - ۱$ و $[v_k, v_۱]$ روی C متعلق باشند. (در این جا $[v_i, v_{i+۱}]$ و $[v_k, v_۱]$ آن مسیرهای بسته روی C هستند که شامل هیچ‌کدام از v_jهای دیگر نیستند.)

تمرین ۵.۵ با استفاده از یک مثال ساده نشان دهید که عکس قضیه‌ی دیراک (تمرین ۴.۵) درست نیست.

حل برای $k > ۳$، یک دور با k راس k-همبند نیست، اما تمامی k راس آن روی یک دور قرار دارند.

تمرین ۵.۶ نشان دهید که یک گراف k-همبند ساده روی $k + ۱$ راس، $K_{k+۱}$ است.

حل دو راس دلخواه x و y از گراف G را در نظر می‌گیریم. چون G گراف k-همبند

است پس k مسیر درونی-مجزا از x به y وجود دارد. چون غیر از x و y تعداد $k-1$ راس وجود دارند، نتیجه می‌گیریم که یکی از این k مسیر باید یالی بین x و y باشد. از این‌رو G گراف کامل است.

تمرین **۵.۷ قضیه‌ی دیراک (مرجع [۳۳]؛ مرجع [۶۱] را نیز ببینید)** نشان دهید که یک گراف G با حداقل $2k$ راس k-همبند است اگر و تنها اگر به ازای هر دو مجموعه‌ی مجزای V_1 و V_2 متشکل از k راس، k-مسیر مجزا از V_1 به V_2 در G وجود داشته باشد.

حل ($\Longleftarrow$) فرض کنید G گراف k-همبند باشد و V_1 و V_2 دو مجموعه‌ی مجزا متشکل از k راس باشند. گراف H را از G با اضافه کردن دو راس v_1 و v_2 با وصل v_1 به همه‌ی راس‌های V_1 و وصل v_2 به همه‌ی راس‌های V_2 می‌سازیم. در این صورت گراف H نیز k-همبند است. طبق قضیه‌ی ویتنی k مسیر درونی-مجزا از v_1 به v_2 وجود دارد. با توجه به نحوه‌ی ساختن H هر کدام از این مسیرها باید شامل یک راس متمایز از V_1 و V_2 باشد. از این‌رو زیرمسیرهای متناظر در G، k مسیر درونی-مجزا هستند که V_1 را به V_2 وصل می‌کنند.

($\Longrightarrow$) فرض کنید که G یک گراف با حداقل $2k$ راس باشد و به ازای هر دو مجموعه‌ی مجزای V_1 و V_2 متشکل از k راس، k-مسیر مجزا از V_1 به V_2 در G وجود داشته باشد. باید نشان دهیم G گراف k-همبند است. فرض کنید G گراف k-همبند نباشد. در این صورت یک برش راسی S وجود دارد که $|S| = k-1$. فرض کنید G_1 مولفه‌ی $G-S$ با کوچکترین مرتبه باشد.

حالت ۱: $|V(G_1)| \geq k$. در این حالت فرض کنید V_1 شامل k راس از G_1 باشد. سپس مولفه‌ی دیگری مانند G_2 از $G-S$ در نظر می‌گیریم. چون G_1 کمترین مرتبه را دارد داریم $|V(G_2)| \geq k$. مجموعه‌ی V_2 را شامل k راس از G_2 در نظر می‌گیریم. طبق فرض k مسیر درونی-مجزا از V_1 به V_2 وجود دارد. اما چون S تنها شامل $k-1$ راس است، پس S نمی‌تواند G_1 و G_2 را جدا کند، که تناقض است.

حالت ۱: $|V(G_1)| = \ell < k$. فرض کنید V_1 شامل همه‌ی راس‌های G_1، به همراه $k-\ell$ راس از S باشد. سپس فرض کنید V_2 مشتمل بر $(k-1)-(k-\ell))$ راس

باقی‌مانده‌ی S، به همراه $k+\ell-۱$ راس از مولفه‌ی دیگری از $G-S$ (توجه کنید که $V_۲$ دارای k عضو است). در این صورت طبق فرض k مسیر درونی-مجزا در G از $V_۱$ به $V_۲$ وجود دارند. $G-S$ را در نظر بگیرید. چون $|S|=k-۱$، پس حذف راس‌های S جداکثر $k-۱$ تا از این مسیرها را نا همبند می‌کند. بنابراین باید یک مسیر باقی بماند، که الزاماً یک راس از $G_۱$ را به یک راس از مولفه‌ی دیگری از $G-S$ وصل می‌کند. این مطلب مجدداً با این حقیقت که S یک برش راسی با یک مولفه‌ی $G_۱$ است تناقض دارد. چون در هر حالت به تناقض رسیدیم، پس G باید k-همبند باشد.

چند تمرین

تمرین ۱.۶ ثابت کنید گراف ساده‌ی همبند مکعبی با کمتر از ۱۰ راس که شامل برش یالی باشد وجود ندارد. یک گراف ساده‌ی همبند مکعبی با دقیقاً ۱۰ راس که شامل یک یال برشی باشد بسازید.

حل فرض کنید G یک گراف همبند مکعبی با کمتر از ۱۰ راس باشد و $e=uv$ یک یال برشی از G باشد. در این صورت $G-e$ دارای دو مولفه‌ی $G_۱$ و $G_۲$ است. فرض کنید $u\in V(G_۱)$ و $v\in V(G_۲)$. چون $d_{G_۱}(u)=۲$ و $d_{G_۲}(v)=۲$ ، پس دو راس $x_۱,x_۲\in V(G_۱)$ و دو راس $y_۱,y_۲\in V(G_۲)$ وجود دارند. چون $d_{G_۱}(x_i)=۳$ و $d_{G_۲}(y_i)=۳$ به سادگی می‌توان دید که G باید بیش از ۹ راس داشته باشد، که تناقض است. برای یک گراف ۱۰ راسی مکعبی با یک یال برشی گراف تمرین ۱۳.۶ را ببینید.

تمرین ۲.۶ نشان دهید راس v از گراف ساده‌ی G نمی‌تواند راس برشی هم برای G و هم برای G^c باشد.

حل فرض کنید v یک راس برشی از G باشد. در این صورت $G-v$ ناهمبند است و در نتیجه طبق یکی از تمرین‌های فصل اول، $(G-v)^c$ همبند است. اما چون $(G-v)^c=G^c-v$، پس G^c-v همبند است. از این‌رو v راس برشی از G^c نیست.

تمرین ۳.۶ نشان دهید که اگر گراف ساده و همبند بلوک نباشد، آن‌گاه شامل حداقل دو بلوک پایانی است.

حل فرض کنید G یک گراف ساده و همبند باشد که بلوک نیست. چون G بلوک نیست پس دارای حداقل یک راس برشی است و در نتیجه دارای حداقل دو بلوک است. فرض کنید B مجموعه‌ی بلوک‌های G و S مجموعه‌ی راس‌های برشی G باشند. یک گراف H با مجموعه‌ی راس $B \cup S$ در نظر می‌گیریم و مجاورت در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $c_i \in S$ با $B_j \in B$ مجاور است اگر و تنها اگر بلوک B_j از G شامل راس برشی c_i از G باشد. گراف دوبخشی H را درخت راس‌برشی-بلوک G نامیم. چون G حداقل دو بلوک دارد پس درخت H دارای حداقل سه راس است. اکنون برای هر گراف جداپذیر بلوک‌های پایانی متناظر راس‌های آویخته در H هستند. چون هر درخت با حداقل سه راس دارای حداقل دو راس آویخته است، پس G دارای دو بلوک پایانی است.

تمرین ۴.۶ نشان دهید که یک گراف همبند k-منتظم دوبخشی ۲-همبند است.

حل فرض کنید حکم درست نباشد و G یک گراف k-منتظم با دوبخشی‌سازی (A,B) باشد و G گراف ۲-همبند نباشد. G حداقل سه راس دارد، پس یک راس برشی v از G وجود دارد. فرض کنید $G_۱$، $G_۲$، $\dots$، G_j مولفه‌های $G-v$ باشند. بدون کم شدن از کلیت مساله می‌توانیم فرض کنیم $v \in A$. چون $j \geq ۲$، پس یک مولفه مانند G_i وجود دارد که $A_i = A \setminus V(G_i)$ و $B_i = B \setminus V(G_i)$ در $|B_i| \geq |A_i|$ صدق می‌کنند. فرض کنید S مجموعه‌ی یال‌هایی از G باشد که دقیقاً یک راس پایانی در $V(G_i)$ دارند. در این صورت چون هر یال در S دارای یک راس پایانی در B_i است، داریم

$$k|B_i| = \sum_{v\in B_i} d(v) = |S| + m(G_i) > m(G_i) = \sum_{v\in A_i} d(v) = k|A_i|$$

که تناقض است.

تمرین ۷.۶ نشان دهید که گراف ساده و همبند با حداقل سه راس یک مسیر است اگر و تنها اگر دقیقاً دو راس غیر برشی داشته باشد.

حل اگر G یک مسیر باشد، آن‌گاه واضح است که تنها راس‌های برشی G دو راس

پایانی مسیر هستند.
اکنون برعکس فرض کنید گراف ساده و همبند با حداقل سه راس G دقیقاً دو راس غیر برشی داشته باشد. فرض کنید $P:\ av_1v_2\cdots v_kb$ یک مسیر با راس‌های پایانی a و b به طول ماکسیمم در G باشد. در این صورت، چون P مسیر به طول ماکسیمم است، پس همه‌ی راس‌های مجاور a و همه‌ی راس‌های مجاور b در P قرار دارند. اکنون ادعا می‌کنیم که a و b راس‌های برشی نیستند. فرض کنید a راس برشی باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی ۳.۱.۶، دو راس x و y وجود دارند به طوری‌که a در هر $x-y$ مسیر قرار دارد. فرض کنید $P':\ x\cdots vav'\cdots y$ یک $x-y$ مسیر دلخواه باشد. چون v و v' دو راس مجاور با هستند، پس $v,v'\in P$ بنابراین $x-v$ بخش P' به همراه $v-v'$-بخش P و $v'-y$ بخش P' یک $x-y$ مسیر است که شامل a نیست، که متناقض با برشی بودن a است. از این‌رو a راس برشی نیست. به طریق مشابه b نیز راس برشی نیست. چون طبق فرض G تنها دارای دو راس غیربرشی است، پس a و b تنها راس‌های غیر برشی G هستند. اکنون چون هر راس x که متمایز از a و b باشد، یک راس برشی است، پس یک مسیر P_x شامل با طول ماکسیمم وجود دارد که راس‌های پایانی آن a و b هستند. اکنون نشان می‌دهیم $G=P$ فرض کنید چنین نباشد و راس x از G وجود داشته باشد که $x\notin P$. چون x راس برشی است پس $G-x$ دارای حداقل دو مولفه G_1 و G_2 است. بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم که P در G_1 قرار دارد. راس دلخواه $y\in G_2$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت مسیر $P_y:\ a\cdots y\cdots b$ شامل با طول ماکسیمم و راس‌های پایانی آن a و b هستند، در G وجود دارد. راس x نمی‌تواند به طور همزمان در نیمه‌ی اول $a\cdots y$ و هم در نیمه‌ی دوم $y\cdots b$ از P_y باشد، مثلاً $x\notin a\cdots y$ در این صورت $a\cdots y\subseteq G-x$، و در نتیجه $y\in G_1$، که تناقض است.

<u>تمرین ۸.۶</u> ثابت کنید که اگر G گراف k-همبند یا k-یال همبند باشد، آن‌گاه $m\geq\frac{nk}{2}$.

<u>حل</u> طبق قضیه‌ی ویتنی هر دو راس دلخواه از G توسط k مسیر درونی مجزا به هم

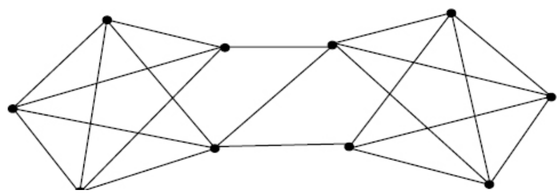
وصل می‌شوند. بنابراین به ازای هر راس x داریم $d(x) \geq k$ و در نتیجه

$$۲m = \sum_{x \in V(G)} d(x) \geq \sum_{x \in V(G)} k = k|V(G)| = kn.$$

از این‌رو $۲m \geq kn$، یعنی $m \geq \frac{nk}{۲}$.

تمرین ۹.۶ یک گراف با $\kappa = ۳$، $\lambda = ۴$، و $\delta = ۵$ بسازید.

حل در شکل زیر یک گراف با $\kappa = ۲$، $\lambda = ۳$، $\delta = ۴$ نشان داده شده است.



تمرین ۱۰.۶ به ازای هر سه عدد صحیح مثبت a، b، c، با $a \leq b \leq c$، یک گراف ساده با $\kappa = a$، $\lambda = b$، و $\delta = c$ بسازید.

حل دو کپی مجزا از $K_{c+۱}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A یک مجموعه‌ی a راسی از یکی از این کپی‌ها و B مجموعه‌ی b راسی از کپی دیگر باشند. همه‌ی راس‌های A و B را با هم مجاور می‌کنیم. فرض کنید G گراف حاصل باشد. چون A یک برش راسی است و مجموعه‌ی این b یال یک برش یالی از گراف G است، واضح است که $\kappa(G) = a$ و $\lambda(G) = b$. همچنین حداقل یک راس وجود دارد که در $A \cup B$ نیست و درجه‌اش برابر c است، پس $\delta(G) = c$ این روند برای $\kappa = ۱$، $\lambda = ۲$، و $\delta = ۳$ در شکل زیر نشان داده شده است.