کتاب درسی نظریه گراف

بالاکریشنان و رانگاناتهان

(حل تمرین‌های فصل ۱)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

خوانندگان گرامی در صورتی که برای یک مساله حل دیگری دارید، یا حل مساله‌ای ایراد دارد، یا حل داده شده برای یک مساله مبهم است، یا برای مساله‌ای که حل آن نیامده راه حلی دارید، لطفاً با اینجانب تماس بگیرید.

web: http://taeri.iut.ac.ir

e-mail: b.taeri@cc.iut.ac.ir

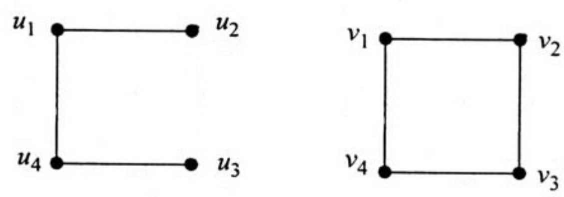
تاریخ آخرین ویرایش: هفت شهریور ۱۳۹۲

فصل ۱

نتایج اساسی

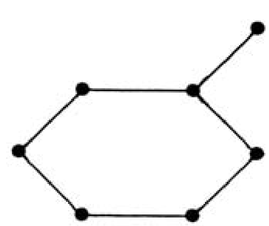
تمرین ۱.۱ فرض کنید G و H گراف‌های ساده باشند و $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ یک تابع دوسویی باشد که $uv \in E(G)$ نتیجه دهد $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. با مثالی نشان دهید که ϕ ممکن است یک‌ریختی از G به H نباشد.

حل گراف‌های G و H در شکل زیر را در نظر بگیرید. تابع $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ با ضابطه‌ی $\phi(u_i) = v_i$ دارای خاصیت مورد نظر است ولی یکریختی نیست.

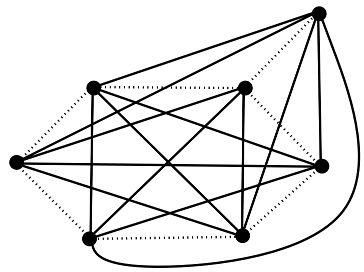


گراف G گراف H

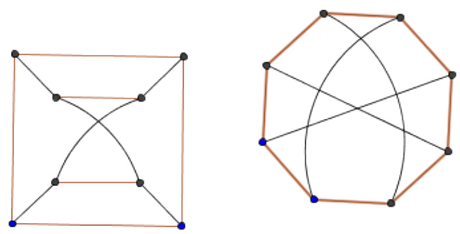
تمرین ۱.۲ مکمل گراف ساده زیر را بیابید.



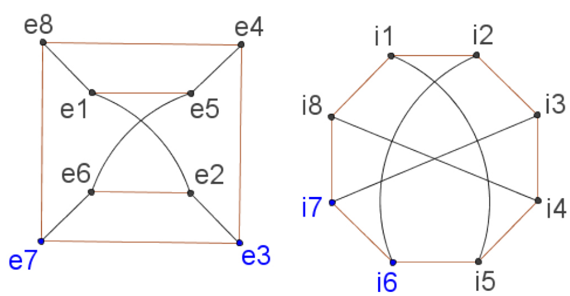
حل مکمل گراف در شکل زیر نشان داده شده است. یال‌های گراف با نقطه‌چین و یال‌های گراف مکمل آن با خطوط سیاه نشان شده‌اند.



یک مساله نشان دهید دو گراف زیر یکریخت هستند.



حل تناظر بین راس‌ها $e_j \mapsto i_j$، (بنابراین و یکریختی بین دو گراف) در شکل زیر داده شده است.



تمرین ۱.۳ نشان دهید که اگر G و H گراف‌های یک‌ریخت باشند، آن‌گاه درجه‌ی هر زوج متناظر از راس‌های G و H یکسان است.

حل فرض کنید که $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ یکریختی باشد و $v \in V(G)$. باید نشان دهیم $d_G(v) = d_H(f(v))$. فرض کنید u یک راس مجاور با v در G باشد، یعنی

$uv \in E(G)$. چون f یکریختی است داریم $f(u)f(v) \in E(H)$، یعنی $f(u)$ مجاور با $f(v)$ است. بنابراین $d_G(v) \leq d_H(f(v))$. اکنون فرض کنید w یک راس مجاور با $f(v)$ در H باشد، چون f پوشا است، پس $u \in V(G)$ وجود دارد که $w = f(u)$. اکنون چون f یکریختی است و $wf(v) = f(u)f(v) \in E(H)$، داریم $uv \in E(G)$. در نتیجه $d_H(f(v)) \leq d_G(v)$.

تمرین ۲.۳ فرض کنید $d = (d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ دنباله‌ی درجه‌ی یک گراف، و r عدد صحیح مثبت دل‌خواهی باشد. نشان دهید $\sum_{i=۱}^n d_i^r$ زوج است.

حل می‌دانیم (نتیجه‌ی ۱.۳.۶) که تعداد راس‌های درجه‌ی فرد عددی زوج است. فرض کنید $c_۱$، $c_۲$، $\ldots$، $c_{۲t}$ درجه‌ی راس‌های G باشند که فرد هستند و $k_۱$، $k_۲$، $\ldots$، k_s درجه‌ی راس‌های G باشند که زوج هستند. در این صورت $c_۱^r$، $c_۲^r$، $\ldots$، $c_{۲t}^r$ فرد هستند و $k_۱^r$، $k_۲^r$، $\ldots$، k_s^r زوج هستند. از این‌رو $c_۱^r + \cdots + c_{۲t}^r$ و $k_۱^r + \cdots + k_s^r$ هردو زوج هستند. در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n} d_i^r = \sum_{i=۱}^{۲t} c_i^r + \sum_{i=۱}^{s} k_i^r$$

عددی زوج است.

تمرین ۳.۳ اگر $d = (d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ دنباله‌ی دل‌خواهی از اعداد صحیح نامنفی باشد که $\sum_{i=۱}^n d_i$ زوج است، نشان دهید یک گراف (نه لزوماً ساده) با دنباله‌ی درجه‌ی d وجود دارد.

حل چون، طبق قضیه‌ی اویلر (قضیه‌ی ۱.۳.۴)، $\sum_{i=۱}^n d_i$ عددی زوج است پس تعداد d_iهایی که فرد هستند، عددی زوج است. فرض کنید $c_۱$، $c_۲$، $\ldots$، $c_{۲t}$ اعداد فرد در $\{d_۱, \ldots, d_n\}$ و $k_۱$، $k_۲$، $\ldots$، k_s اعداد زوج در $\{d_۱, \ldots, d_n\}$ باشند. گراف G را به صورت زیر می‌سازیم.

(آ) متناظر هر c_i یک راس با $\frac{c_i}{۲}$ طوقه در نظر می‌گیریم.

(ب) متناظر هر k_i یک راس با $\frac{k_i - ۱}{۲}$ طوقه در نظر می‌گیریم.

(پ) یال‌های $v_۱v_۲$، $v_۲v_۳$، ...، $v_{۲s-۱}v_{۲s}$ را اضافه می‌کنیم.

تمرین ۳.۴ فرض کنید G یک گراف با n راس و m یال باشد. فرض کنید درجه‌ی هر راس G برابر k یا $k+۱$ باشد. نشان دهید تعداد راس‌های درجه‌ی k در G برابر است با $(k+۱)n-۲m$.

حل فرض کنید $(d_۱,\dots,d_n)$ دنباله‌ی درجه‌ی G باشد. فرض کنید G دارای r راس از درجه‌ی k و s راس از درجه‌ی $k+۱$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} ۲m &= \sum_{i=۱}^{n} d_i \\ &= \sum_{i=۱}^{r} dk + \sum_{i=۱}^{s}(k+۱) \\ &= rk + s(k+۱) \\ &= (r+s)k + s \\ &= nk + s. \end{aligned}$$

بنابراین $s = ۲m - nk$ و در نتیجه

$$r = n - s = n - (۲m - nk) = n(k+۱) - ۲m.$$

تمرین ۴.۱ ثابت کنید که تابع d که در بالا (صفحه‌ی ۱۶) تعریف شد یک متریک روی $V(G)$ است.

حل (۱) فرض کنید u و v دو راس باشند. اگر هیچ $u-v$ مسیری وجود نداشته باشد، آن‌گاه طبق تعریف $d(u,v)=\infty>۰$. پس فرض کنید یک $u-v$ مسیر وجود داشته باشد و $u=x_۰\sim x_۱\sim\cdots\sim x_k=v$ (گاهی اوقات برای اینکه بگوییم u و v مجاور هستند، یعنی $uv\in E(G)$، می‌نویسیم $u\sim v$) یک کوتاه‌ترین مسیر به طول k بین u و v وجود باشد. پس مجدداً طبق تعریف داریم $d(u,v)=k\geq ۰$. توجه کنید که $k=۰$ اگر و تنها اگر $u=v$، بنابراین $d(u,v)=۰$ اگر و تنها اگر $u=v$.

(۲) فرض کنید u و v دو راس باشند. اگر هیچ $u-v$ مسیری وجود نداشته باشد،

آن‌گاه هیچ $u-v$ مسیری نیز وجود ندارد و بنابراین $d(u,v)=\infty=d(v,u)$. پس فرض کنید یک $v-u$ مسیر وجود داشته باشد و $u=x_۰\sim x_۱\sim\cdots\sim x_k=v$ یک کوتاه‌ترین مسیر به طول k بین u و v وجود باشد. در این صورت $v=x_k\sim x_{k-۱}\sim\cdots\sim x_۰=u$ یک کوتاه‌ترین مسیر به طول k بین v و u وجود باشد. از این‌رو $d(u,v)=k=d(v,u)$.

(۲) فرض کنید u ، v و w دو راس باشند. اگر $d(u,w)=\infty$ یا $d(w,v)=\infty$، آن‌گاه

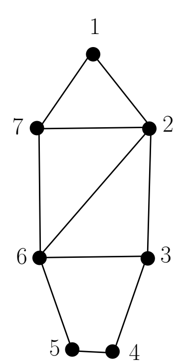
$$d(u,v)<\infty=d(u,w)+d(w,v).$$

پس فرض کنید $d(u,w)=k<\infty$ یا $d(w,v)=t<\infty$. در این صورت یک کوتاه‌ترین مسیر $u=x_۰\sim x_۱\sim\cdots\sim x_k=w$ به طول k بین u و w؛ و یک کوتاه‌ترین مسیر $w=y_۰\sim y_۱\sim\cdots\sim y_t=v$ به طول k بین w و v وجود دارند. در این صورت گشت $u=x_۰\sim x_۱\sim\cdots\sim x_k=wy_۰\sim y_۱\sim\cdots\sim y_t=v$ یک گشت بین u و v است. با حذف یال‌ها و راس‌های تکراری (در صورت وجود) از گشت بالا می‌توانیم یک $u-v$ مسیر با طول کمتر یا مساوی $k+t$ بیابیم (چرا؟). از این‌رو

$$d(u,v)\leq k+t=d(u,w)+d(w,v).$$

در نتیجه تابع d یک متریک روی $V(G)$ است.

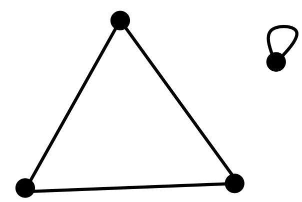
تمرین ۴.۲ در گراف زیر، یک گذر بسته به طول ۷ بیابید که دور نباشد.



حل مثلاً گذر ۱ ~ ۷ ~ ۶ ~ ۳ ~ ۲ ~ ۷ ~ ۶ ~ ۲ ~ ۱ را در نظر بگیرید، که از یال $\{۶,۷\}$ دو بار عبور می‌کند.

تمرین ۴.۳ مثالی از یک گراف غیرساده‌ی ناهمبند با $\delta \geq \frac{n-1}{2}$ بزنید.

حل یک دور به همراه یک راس خارج از دور با طوقه‌ای روی آن را در نظر بگیرید، مثلاً $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_4v_4\}$.



تمرین ۴.۴ با استفاده از یک مثال نشان دهید که شرط $\delta \geq \frac{n-2}{2}$ برای یک گراف ساده همبندی را نتیجه نمی‌دهد.

حل گراف G متشکل از دو یال مجزا را در نظر بگیرید.

تمرین ۴.۵ ثابت کنید که در یک گروه شش نفره باید سه نفر دو به دو آشنا یا سه نفر دو به دو ناآشنا وجود داشته باشند.

حل یک گراف با ۶ راس در نظر می‌گیریم که هر راس متناظر یک شخص باشد. دو راس را مجاور می‌گیریم هرگاه دو شخص متناظر آشنا باشند. باید ثابت کنیم یا سه راس وجود دارند که با هم مجاور هستند یا سه راس وجود دارند که با هم مجاور نیستند. بنابراین باید ثابت کنیم در هر گراف G با ۶ راس، G یا G^c شامل مثلث است. فرض کنید $v \in V(G)$ چون v در G یا در G^c با پنج راس دیگر از G مجاور است، بدون کم شدن از کلیت مساله فرض می‌کنیم سه راس u_1، u_2 و u_3 در G با v مجاور هستند. اگر دو راس از این سه راس با هم مجاور باشند، آنگاه این دو راس به همراه v یک مثلث در G تشکیل می‌دهند. در غیر این صورت هیچکدام از این راس‌ها در G مجاور نیستند و بنابراین در G^c یک مثلث تشکیل می‌دهند.

تمرین ۴.۶ نشان دهید که اگر G یک گراف خود-مکمل از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه یا $n \equiv 0 \pmod 4$ یا $n \equiv 1 \pmod 4$

حل فرض کنید $m(G) = m_1$ و $m(G^c) = m_2$. چون G خود-دوگان است داریم

$m_1 = m_2$ و در نتیجه
$$2m_1 = m_1 + m_2 = m(K_n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$
از این‌رو $4m_1 = n(n-1)$. پس ۴ شمارنده‌ای از $n(n-1)$ است، یعنی $4 \mid n(n-1)$ دو حالت رخ می‌دهد.

(۱) اگر n زوج باشد، آنگاه $n-1$ فرد است. پس $(4, n) = 1$ و بنابه لم اقلیدس $4 \mid n-1$.

(۲) اگر n فرد باشد، آنگاه $n-1$ زوج است. پس $(4, n-1) = 1$ و بنابه لم اقلیدس $4 \mid n$.

یک مساله نشان دهید که هر گراف خود-مکمل با $n = 4k+1$ راس دارای یک راس با درجه‌ی $2k = \frac{n-1}{2}$ است.

حل فرض کنید G یک گراف خود-مکمل و $\phi : G \longrightarrow G^c$ یک یکریختی باشد. فرض کنید x یک راس با $d_G(x) < 2k$ باشد. در این صورت چون ϕ یکریختی است داریم

$$\begin{aligned} d_G(x) < 2k &\iff d_{G^c}(\phi(x)) < 2k \\ &\iff d_G(\phi(x)) = (n-1) - d_{G^c}(\phi(x)) > n - 1 - 2k = 2k \\ &\iff d_G(\phi(x)) > 2k. \end{aligned}$$

بنابراین ϕ یک تناظر دوسویی بین مجموعه‌ی V_1 متشکل راس‌های با درجه‌ی کمتر از $2k$ و مجموعه‌ی V_2 متشکل از راس‌های با درجه‌ی بیشتر از $2k$ است. به ویژه تعداد راس‌های با درجه‌ی کمتر از $2k$ و تعداد راسهای با درجه‌ی بیشتر از $2k$ برابر هستند، یعنی $|V_1| = |V_2|$. از این‌رو G باید حداقل یک راس از درجه‌ی $2k$ داشته باشد، زیرا در غیر این صورت $V(G) = V_1 \cup V_2$ و $4k + 1 = |V(G)| = |V_1| + |V_2| = 2|V_1|$، که تناقض است.

تمرین ۴.۷ نشان دهید اگر یک گراف خود-مکمل شامل یک راس آویخته باشد، آنگاه باید راس آویخته‌ی دیگری وجود داشته باشد.

حل فرض کنید که تنها یک راس مانند u از درجه‌ی ۱ در G وجود داشته باشد. چون $G = G^c$ پس G^c نیز تنها یک راس از درجه‌ی ۱ دارد. فرض کنید x راس مجاور با u در G باشد. در این صورت به ازای هر راس $v \in V \setminus \{u,x\}$ داریم $d_G(v) \leq n - ۳$، زیرا چنین راس‌هایی با u مجاور نیستند. اما چون $d_G(v) + d_{G^c}(v) = n - ۱$ به دست می‌آوریم $n - ۱ - d_{G^c}(v) \leq n - ۳$، یعنی $d_{G^c}(v) \geq ۲$. از این‌رو x تنها راس آویخته در G^c است. همچنین توجه کنید که چون $d_G(u) + d_{G^c}(u) = n - ۱$، پس x راس یکتا از درجه‌ی $n - ۲$ در G و راس u راس یکتا از درجه‌ی $n - ۲$ در G است. از این‌رو اگر $\varphi : G \longrightarrow G^c$ یکریختی باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم $\varphi(u) = x$ و $\varphi(x) = u$. از این‌رو اگر $G_۱$ زیرگراف القا شده توسط $\{u,x\}$ باشد، آن‌گاه $G_۱$ یک گراف خود-مکمل است و بنابراین طبق تمرین ۴.۶، تعداد راس‌های آن برابر $۴k$ یا $۴k + ۱$، و این تناقض است زیرا $n(G_۱) = ۴$.

این روند اثبات را می‌توان تعمیم داد و نتیجه‌ای کلی‌تر گرفت: در یک گراف خود-مکمل G تعداد راس‌های درجه‌ی d، که در آن $d \neq \frac{n-۱}{۲}$، عددی زوج است. برای اثبات این مطلب فرض کنید G دقیقاً تعداد r راس از درجه‌ی d داشته باشد. در این صورت G دقیقاً r راس از درجه‌ی $n - ۱ - d$ دارد و یکریختی $\varphi : G \longrightarrow G^c$ این $۲r$ راس را به یکدیگر تصویر می‌کند. از این‌رو این $۲r$ راس یک زیرگراف خود-مکمل $G_۱$ القا می‌کنند. پس طبق تمرین ۴.۶، ۴ یک شمارنده از $۲r$ است. یعنی r زوج است.

تمرین ۴.۸ ثابت کنید که گراف ساده‌ی G همبند است اگر و تنها اگر به ازای هر افراز V به دو زیرمجموعه‌ی ناتهی $V_۱$ و $V_۲$، یالی وجود دارد که یک راس در $V_۱$ را به یک راس در $V_۲$ وصل می‌کند.

حل ($\Longleftarrow$) فرض کنید V اجتماع مجزای $V_۱$ و $V_۲$ باشد. راس‌های $v_۱ \in V_۱$ و $v_۲ \in V_۲$ را اختیار می‌کنیم. چون G همبند است، مسیر $v_۱ = u_۰ \sim u_۱ \sim \cdots \sim u_m = v_۲$ وجود دارد. چون $v_۱ \in V_۱$ و $v_۲ \notin V_۱$ (یعنی $v_۲ \in V_۲$) و $V_۱ \cap V_۲ = \emptyset$، پس یال $u_i u_{i+۱}$ وجود دارد که $u_i \in V_۱$ و $u_{i+۱} \in V_۲$ و این حکم را ثابت می‌کند.

($\Longrightarrow$) (برهان خلف) فرض کنید G همبند نباشد و $G_۱$ را مولفه‌ای از G در نظر می‌گیریم.

قرار می‌دهیم $V_1 = V(G_1)$ و $V_2 = V(G) \setminus V_1$ در این صورت $\{V_1, V_2\}$ یک افراز از $V(G)$ به مجموعه‌های ناتهی است. علاوه بر آن چون G_1 یک مولفه از G است، هیچ اتصالی بین V_1 و V_2 نیست و این خلاف فرض است. از این‌رو G همبند است.

یک مساله اگر n یک عدد طبیعی باشد نشان دهید یک گراف خود-مکمل n راسی وجود دارد اگر و تنها اگر $n = 4k$ یا $n = 4k + 1$.

حل ابتدا فرض کنید $n = 4k$ و چهار مجموعه‌ی دوبدو مجزا که تعداد اعضای هر کدام برابر k است را در نظر بگیرید. گراف G را با مجموعه راس $V(G) = \bigcup_{i=1}^{4} X_i$ می‌سازیم، که در آن $E(G)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: همه‌ی راس‌های X_1 را با هم مجاور در نظر می‌گیریم و هم‌چنین همه‌ی راس‌های X_4 را با هم مجاور در نظر می‌گیریم، یعنی همه‌ی یال‌های گراف‌های کامل روی X_1 و X_4 در $E(G)$ قرار دارند. سپس هر راس در X_1 را با هر راس در X_2 مجاور می‌گیریم. یعنی همه‌ی یال‌های گراف‌های کامل دو بخشی با مجموعه‌ی بخشی (X_1, X_2) در $E(G)$ قرار دارند. به همین صورت همه‌ی یال‌های گراف‌های کامل دو بخشی با مجموعه‌های بخشی (X_2, X_3) و (X_3, X_4) را در $E(G)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت G^c دارای مجموعه یال دو گراف کامل با مجموعه راس‌های، به ترتیب، X_2 و X_3، و یال‌های گراف‌های کامل دو بخشی با مجموعه‌های بخشی، به ترتیب، (X_2, X_4) و (X_4, X_1) و (X_1, X_3) است. اکنون به سادگی می‌توان دید که G و G^c یکریخت هستند.

اکنون فرض کنید $n = 4k + 1$ در این حالت گراف G به صورت بالا روی $4k$ راس را می‌سازیم. یک راس جدید v به $V(G)$ اضافه می‌کنیم و بین v و هر راس از $X_1 \cup X_4$ یک یال در نظر می‌گیریم. گراف G' به دست آمده یک گراف خود-مکمل است.

در نهایت فرض کنید $n = 4k + 2$ یا $n = 4k + 3$. در این حالت تعداد یال‌های گراف کامل K_n عددی فرد است. پس K_n را نمی‌توان به یک گراف G و G^c تجزیه کرد به طوری‌که $G \cong G^c$.

تمرین ۴.۹ ثابت کنید که در یک گراف ساده‌ی G، اجتماع دو مسیر متمایز که دو

راس متمایز را به هم وصل می‌کنند شامل یک دور است.

حل فرض کنید P و Q دو $u-v$ مسیر متمایز باشند. فرض کنید u_1 اولین راس مشترک P و Q پس از u باشد (این راس ممکن است v باشد). در این صورت اجتماع $u-u_1$ بخش P و $u-u_1$ بخش Q یک دور است.

تمرین ۴.۱۰ با استفاده از یک مثال نشان دهید اجتماع دو گشت متمایز که دو راس متمایز را به هم وصل می‌کنند ممکن است شامل یک دور نباشد.

حل دو گشت $P: x \sim y \sim u$ و $Q: x \sim y \sim x \sim y \sim u$ متمایز هستند ولی اجتماع آن‌ها شامل دور نیست.

تمرین ۴.۱۱ اگر گراف ساده و همبند G کامل نباشد، آنگاه نشان دهید سه راس متمایز u، v، w از G وجود دارند به طوری که uv و vw دو یال از G هستند اما uw یالی از G نیست.

حل چون G کامل نیست پس دو راس $x, w \in V(G)$ وجود دارند که $xw \notin E(G)$ اکنون چون G همبند است یک مسیر از x به w وجود دارد. فرض کنید $P: x \sim \cdots \sim u \sim v \sim w$ کوتاه‌ترین مسیر از x به w باشد (ممکن است $x = u$، یعنی طول مسیر برابر ۲ باشد). در این صورت uv و vw دو یال از G هستند اما uw یالی از G نیست.

تمرین ۴.۱۲ (مرجع [۱۱۱] را ببینید) نشان دهید که گراف ساده و همبند G گراف کامل است اگر و تنها اگر راس v از G وجود داشته باشد که به ازای هر $u \in N[v]$، $N[v] = N[u]$.

حل وقتی که G گراف کامل باشد به وضوح شرط داده شده در مساله را داریم، زیرا همه‌ی راس‌ها با هم مجاور هستند. برعکس فرض کنید که راس v از G وجود داشته باشد که به ازای هر $u \in N[v]$، $N[v] = N[u]$ به ویژه اگر u یک راس مجاور با v باشد، آنگاه هر راس مجاور با u نیز با v مجاور است. نشان می‌دهیم G کامل است. ابتدا

نشان می‌دهیم v با تمامی راس‌ها مجاور است. فرض کنید x یک راس دلخواه باشد. چون G همبند است یک $x-v$ مسیر $x = x_۱ \sim x_۲ \sim \cdots \sim x_{k-۱} \sim x_k = v$ در G وجود دارد. چون $x_{k-۲}$ با $x_{k-۱}$ مجاور است پس طبق فرض $x_{k-۲}$ با v مجاور است. اکنون چون $x_{k-۲}$ با $x_{k-۳}$ مجاور است پس طبق فرض $x_{k-۳}$ با v مجاور است. با ادامه‌ی این روند به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که $x = x_۱$ با v مجاور است. اکنون واضح است که هر دو راس دلخواه x و y با هم مجاور هستند، زیرا x و y مجاور با v هستند و بنابراین طبق فرض x با y مجاور است.

تمرین ۴.۱۳ گراف ساده و همبند G را بسیار نامنتظم نامیم هرگاه به ازای هر $v \in V(G)$، درجه‌ی همه‌ی همسایه‌های v متمایز باشند. مثلاً، $P_۴$ یک گراف با این خاصیت است. ثابت کنید که گراف بسیار نامنتظم با مرتبه‌ی ۳ یا ۵ وجود ندارد.

حل تنها دو گراف همبند مرتبه‌ی ۳ وجود دارند مسیر سه راسی $P_۳$ و گراف کامل سه راسی $K_۳$ که به وضوح بسیار نامنتظم نیستند. در واقع در $P_۳ : xyz$ همسایه‌های راس y دارای درجه‌ی یکسان ۱ هستند؛ و در $K_۳ : xyzx$ هر راس دارای همسایه‌های با درجه‌ی یکسان ۲ است.

مختصری درباره‌ی گروه متقارن: برای بررسی گروه خودریختی‌های یک گراف به دانستن مفهوم گروه متقارن نیاز داریم. این گروه را به طور مختصر بررسی می‌کنیم. برای دیدن مطالب بیشتر به کتاب‌های جبر (مثلاً کتاب مبانی جبر مجرد، تالیف بیژن طائری، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان) مراجعه کنید. فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. هر تابع دوسویی از X به X را یک جایگشت گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت‌های روی X را با S_X نشان می‌دهیم. فرض کنید α و β دو جایگشت روی X باشند. ترکیب α و β (که گاهی اوقات آن‌را حاصل‌ضرب α و β نیز نامیم و به جای $\alpha \circ \beta$ می‌نویسیم $\alpha\beta$) یک جایگشت روی X است. ترکیب α و β، یعنی $\alpha\beta$، به ازای هر $x \in X$ با $(\alpha\beta)(x) = (\alpha(\beta(x))$ تعریف می‌شود. چون ترکیب توابع شرکت‌پذیر است و تابع همانی روی X یک جایگشت X است و یک جایگشت وارون‌پذیر است، پس S_X همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه است. S_X را گروه متقارن روی X نامیم.

اگر X مجموعه‌ی متناهی و n عضوی باشد، معمولاً قرار می‌دهیم $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و به جای S_X می‌نویسیم S_n. در این حالت هر جایگشت روی X را یک جایگشت روی n حرف گوییم. اگر X متناهی و دارای n عضو باشد، به سادگی می‌توان دید که $n!$ جایگشت متمایز روی X وجود دارد. درواقع فرض کنید $\alpha \in S_n$ یک جایگشت روی n حرف باشد. $\alpha(۱)$ را می‌توان به n راه تعریف کرد. چون α یک‌به‌یک است $\alpha(۲)$ را به می‌توان به $n - ۱$ راه تعریف کرد. به همین ترتیب $\alpha(n)$ را به می‌توان به ۱ راه تعریف کرد. پس α را می‌توان به

$$n(n-۱)\cdots ۲ \cdot ۱ = n!$$

طریق تعریف کرد. از این‌رو $|S_n| = n!$. اگر $\alpha \in S_n$ یک جایگشت باشد و $x \in X$ و $\alpha(x) = y$ گوییم α، x را به y می‌برد. جایگشت $\alpha \in S_X$ را یک دور به طول r یا یک r-دور نامیم، هرگاه اعضای $x_۱, x_۲, \ldots, x_r \in X$ وجود داشته باشند که

$$\alpha(x_۱) = x_۲,\ \ \alpha(x_۲) = x_۳,\ \ \ldots,\ \ \alpha(x_{r-۱}) = x_r,\ \ \alpha(x_r) = x_۱,$$

و $\alpha(x) = x$، به ازای هر $x \neq x_i$، یعنی به ازای هر $i = ۱, \ldots, r - ۱$، $\alpha(x_i) = x_{i+۱}$، و $\alpha(x_r) = x_۱$، و علاوه بر آن به ازای هر $x \neq x_i$، $\alpha(x) = x$. در این حالت می‌نویسیم

$$\alpha = (x_۱\ x_۲\ \cdots\ x_r).$$

در واقع دور α، به ازای هر $i = ۱, \ldots, r - ۱$، نقطه‌ی x_i را $x_{i+۱}$ می‌برد، نقطه‌ی x_r را به $x_۱$ می‌برد و نقاط دیگر را ثابت نگه می‌دارد. توجه کنید که دور α را می‌توان از هر کدام از x_iها شروع کرد و بنابراین به r طریق زیر می‌توان α را نوشت:

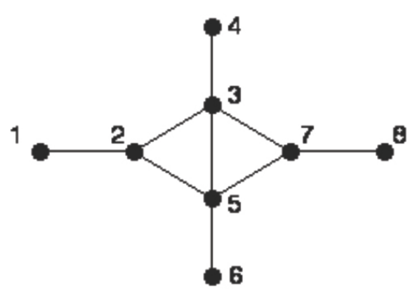
$$\begin{aligned}
\alpha &= (x_۱\ x_۲\ \cdots\ x_r)\\
&= (x_۲\ x_۳\ \cdots\ x_r\ x_۱)\\
&= (x_۳\ x_۴\ \cdots\ x_r\ x_۱\ x_۲)\\
&\ \vdots\\
&= (x_r\ x_۱\ \cdots\ x_{r-۱}).
\end{aligned}$$

جایگشت همانی یک دور به طول ۱ است که آن‌را با () یا (۱) نشان می‌دهیم. یک دور به طول ۲ را ترانهش می‌نامیم. به عنوان مثال اعضای $S_۳$ می‌توانیم با استفاده از نماد دور به صورت زیر بنویسم:

$$S_۳ = \{(),\quad (۱\ ۲),\quad (۱\ ۳),\quad (۲\ ۳),\quad (۱\ ۲\ ۳),\quad (۱\ ۳\ ۲)\}.$$

پس $S_۳$ دارای سه ترانهش و دو دور به طول ۳ است. بنابراین هر عضو از $S_۳$ یک دور است. اما این مطلب برای S_n در حالت کلی درست نیست. می‌توانیم نشان دهیم که هر جایگشت دلخواه به حاصل‌ضرب (ترکیب) دورهای مجزا تجزیه می‌شود. مثلاً (۳ ۵ ۱)(۴ ۲) یک جایگشت در $S_۵$ و حاصل‌ضرب (ترکیب) دو دور است. توجه کنید که $S_۵$ دارای $۱۲۰ = !۵$ عضو است.
یادآوری می‌کنیم که اگر $G = (V, E)$ یک گراف باشد، آن‌گاه یک خودریختی ϕ از G یک جایگشت روی V است. بنابراین $\Gamma(G)$ زیرمجموعه‌ای از گروه جایگشت‌ها روی V، یعنی S_V، است. همچنین $\Gamma(G)$ نسبت به عمل ترکیب توابع گروه است. گوییم $\Gamma(G)$ زیرگروهی از S_V است و می‌نویسیم $\Gamma(G) \leq S_V$.

یک مساله گروه خودریختی‌های گراف زیر را بیابید.



حل به توجه به شکل واضح است که اعضای $\Gamma(G)$ عبارتند از

$$\varphi_۰ = ()$$

$$\varphi_۱ = (۱\ ۸)(۲\ ۷)$$

$$\varphi_۲ = (۳\ ۵)(۴\ ۶)$$

$$\varphi_۳ = (۱\ ۸)(۲\ ۷)(۳\ ۵)(۴\ ۶)$$

تمرین ۵.۱ نشان دهید گروه خودریختی K_n (یا K_n^c) با گروه متقارن S_n از درجه n یک‌ریخت است.

حل واضح است که $\Gamma(G) = \Gamma(G^c)$، یعنی گروه خودریختی‌های یک گراف و گروه خودریختی‌های مکمل آن یکسان هستند.
اکنون راس‌هایی K_n را با اعداد $\{۱, ۲, \dots, n\}$ شماره گذاری می‌کنیم. هر جایگشت دلخواه در $\phi \in S_n$ یک خودریختی از K_n است، زیرا هر دو راس در K_n با هم مجاور هستند. در واقع اگر i و j دو راس دلخواه در K_n باشند، آن‌گاه ij و $\phi(j)\phi(j)$ یال‌هایی از K_n هستند، بنابراین

$$ij \in E(K_n) \Longleftrightarrow \phi(j)\phi(j) \in E(K_n).$$

تمرین ۵.۲ فرض کنید G یک گراف ساده و همبند با n راس باشد که $\Gamma(G) = S_n$. نشان دهید G گراف کامل K_n است.

حل فرض کنید $V(G) = \{۱, ۲, \dots, n\}$. باید نشان دهیم هر دو راس مجاور هستند. فرض کنید دو راس $i, j \in V(G)$ وجود داشته باشند که $ij \notin E(G)$. چون G همبند است یک مسیر $i = i_۰ \sim i_۱ \sim \dots \sim i_k = j$ وجود دارد. جایگشت $\varphi = (i_۰\ i_۱ \cdots i_k) \in S_n$ را درنظر می‌گیریم. طبق فرض $\varphi \in \Gamma(G)$ چون $i_{k-۱}i_k \in E(G)$ و φ یک خودریختی G است داریم

$$ij = ji = i_k i_۰ = \varphi(i_{k-۱})\varphi(i_k) \in E(G)$$

که تناقض است. پس هر دو راس G مجاور هستند.

تمرین ۵.۳ برای $n > ۱$، (۱) گراف ساده و همبند $G \neq K_n$ که $\Gamma(G) \cong S_n$ و (۲) گراف ساده و ناهمبند $G \neq K_n^c$ با $\Gamma(G) \cong S_n$، ارائه کنید.

حل (۱) گراف $K_{۱,n}$ یک گراف با $n + ۱$ راس است. $K_{۱,n}$ تنها یک راس درجه‌ی n دارد، پس هر خودریختی $K_{۱,n}$ آن‌را ثابت نگه می‌دارد. علاوه بر آن چون n راس درجه‌ی

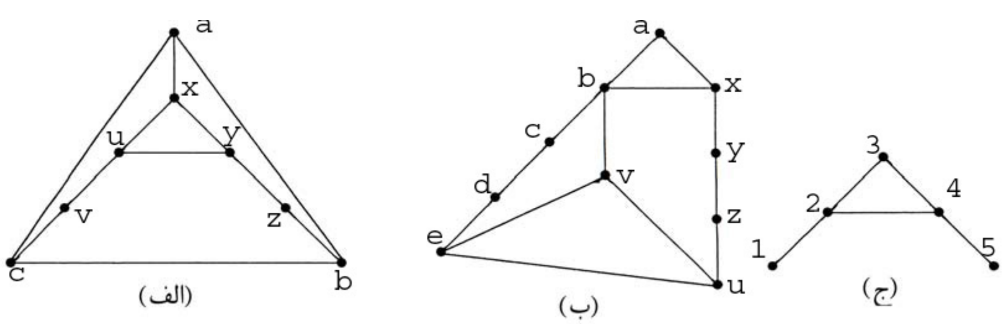
۱ (که آن‌ها را با ۱، ۲، . . .، n برچسب‌گذاری می‌کنیم) با یکدیگر مجاور نیستند و همه با یک راس مجاور هستند، پس جایگشت دلخواه روی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ یک خودریختی از $K_{۱,n}$ است. پس $\Gamma(K_{۱,n}) = S_n$.

هم‌چنین می‌توان ثابت کرد که گراف $n+۲$ راسی $G = K_۱ \cup K^c_{۱,n}$ داریم $\Gamma(G) = S_n$ و تنها همین دو گراف همبند و K_n هستند که گروه خودریختی آن‌ها S_n است، برای اثبات به مقاله‌ی زیر مراجعه نمایید

Gewirtz, A., and L. V. Quintas, Connected extremal edge graphs having symmetric automorphism group. Recent Progress in Combinatorics (W. T. Tutte, ed.) Academic Press, New York, 1969.

(۲) گراف $K^c_{۱,n}$ یک گراف ناهمبند است؛ طبق (۱) و این‌که $\Gamma(G) = \Gamma(G^c)$ گروه خودریختی‌های آن S_n است.

تمرین ۵.۴ گروه خودریختی‌های گراف‌های زیر را بیابید:



(الف) فرض کنید $\varphi \in \Gamma(G)$ غیرهمانی باشد. چون $u \sim y \sim z \sim b \sim c \sim v \sim u$ تنها دور به طول ۶ در G است پس تحت φ به خودش تصویر می‌شود، یعنی

$$\varphi(u) \sim \varphi(y) \sim \varphi(z) \sim \varphi(b) \sim \varphi(c) \sim \varphi(v) \sim \varphi(u)$$

از طرف دیگر v و z تنها راس‌های درجه‌ی ۲ در G هستند. پس دو حالت پیش می‌آید

حالت اول: $\varphi(v) = v$ و $\varphi(z) = z$، در این حالت داریم

$$\varphi(u) \sim \varphi(y) \sim z \sim \varphi(b) \sim \varphi(c) \sim v \sim \varphi(u)$$

در نتیجه
$$\varphi(u)=c,\ \ \varphi(c)=u,\ \ \varphi(y)=b,\ \ \varphi(b)=y.$$
بنابراین
$$c\sim a\sim b\Longrightarrow \varphi(c)\sim\varphi(a)\sim\varphi(b)\Longrightarrow u\sim\varphi(a)\sim y$$
که نتیجه می‌دهد $\varphi(a)=x$ و $\varphi(x)=a$ پس در این حالت
$$\varphi=(u\ c)(y\ b)(x\ a)$$
حالت دوم: $\varphi(v)=z$ و $\varphi(z)=v$، در این حالت داریم
$$\varphi(u)\sim\varphi(y)\sim v\sim\varphi(b)\sim\varphi(c)\sim z\sim\varphi(u)$$
که نتیجه می‌دهد
$$\varphi=(z\ v)(u\ y)(c\ b)$$
پس
$$\begin{aligned}\Gamma(G)&=\{(),(u\ c)(y\ b)(x\ a),(z\ v)(u\ y)(c\ b),(u\ c)(y\ b)(x\ a)(z\ v)(u\ y)(c\ b)\}\\&=\{(),(u\ c)(y\ b)(x\ a),(z\ v)(u\ y)(c\ b),(u\ b)(y\ c)(x\ a)(z\ v)\}\end{aligned}$$
(ب) فرض کنید $\varphi\in\Gamma(G)$ چون تنها راس درجه‌ی ۴ راس b است پس $\varphi(b)=b$ اکنون مثلث (دور به طول ۳) $abxa$ تحت φ باید به یک مثلث تبدیل شود. تنها یک مثلث دیگر درگراف داریم $uveu$ چون تنها راس درجه‌ی ۲ در این مثلث‌ها راس a است پس باید داشته باشیم $\varphi(a)=a$ اکنون داریم
$$a\sim x\Longrightarrow\varphi(a)\sim\varphi(x)\Longrightarrow a\sim\varphi(x)\Longrightarrow\varphi(x)=x$$
هم‌چنین چون φ باید مثلث $uveu$ را به خودش ببرد داریم
$$b\sim v\Longrightarrow\varphi(b)\sim\varphi(v)\Longrightarrow b\sim\varphi(v)\Longrightarrow\varphi(v)=v$$
از طرفی چون
$$x\sim y\sim z\sim u\Longrightarrow x=\varphi(x)\sim\varphi(y)\sim\varphi(z)\sim\varphi(u)$$

پس $\varphi(y)=y$ و $\varphi(z)=z$ و $\varphi(u)=u$ در نتیجه $\Gamma(G)=\{()\}$.

(ج) فرض کنید $\varphi\in\Gamma(G)$ چون تنها راس درجه‌ی ۳ راس ۳ است پس $\varphi(۳)=۳$
اکنون چون ۵ و ۱ تنها راس‌های درجه‌ی ۱ هستند پس دو حالت پیش می‌آید

حالت اول: اگر $\varphi(۱)=۱$ و $\varphi(۵)=۵$، آنگاه

$$۱\sim ۲\Longrightarrow \varphi(۱)\sim\varphi(۲)\Longrightarrow ۱\sim\varphi(۲)\Longrightarrow\varphi(۲)=۲$$

در نتیجه $\varphi(۴)=۴$ پس در این حالت $\varphi=()$ همانی است.

حالت دوم: اگر $\varphi(۱)=۵$ و $\varphi(۵)=۱$، آنگاه

$$۱\sim ۲\Longrightarrow \varphi(۱)\sim\varphi(۲)\Longrightarrow ۵\sim\varphi(۲)\Longrightarrow\varphi(۲)=۴$$

در نتیجه $\varphi(۴)=۲$ پس در این حالت $\varphi=(۱\ ۵)(۲\ ۴)$.

بنابراین $\Gamma(G)=\{(),(۱\ ۵)(۲\ ۴)\}$.

تمرین ۵.۵ فرض کنید G یک گراف ساده باشد و $\gamma\in\Gamma(G)$. نشان دهید که به ازای هر $v\in V(G)$ داریم $\gamma\{N(v)\}=N(\gamma(v))$ و $\gamma\{N[v]\}=N[\gamma(v)]$.

حل ابتدا نشان می‌دهیم $\gamma(N(v))\subseteq N(\gamma(v))$:

$$\begin{aligned}
x\in\gamma(N(v)) &\Longrightarrow \exists u\in N(v),\quad x=\gamma(u)\\
&\Longrightarrow u\sim v,\qquad x=\gamma(u)\\
&\Longrightarrow x=\gamma(u)\sim\gamma(v)\\
&\Longrightarrow x\in N(\gamma(v)).
\end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم $N(\gamma(v))\subseteq\gamma(N(v))$:

$$\begin{aligned}
x\in N(\gamma(v)) &\Longrightarrow x\sim\gamma(v)\\
&\Longrightarrow \exists w\in V(G),\quad x=\gamma(w),\quad x\sim\gamma(v)\quad (\text{چون } \gamma \text{ پوشا است})\\
&\Longrightarrow x=\gamma(w)\sim\gamma(v)\\
&\Longrightarrow w\sim v
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad w \in N(v)$$
$$\Longrightarrow \quad x = \gamma(w) \in \gamma(N(v)).$$

تمرین ۶.۱ نشان دهید گراف یالی ستاره‌ی $K_{۱,n}$ گراف کامل K_n است.

حل فرض کنید $G = K_{۱,n}$ گراف ستاره با راس مرکزی u و راس‌های غیر مرکزی $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ باشد، یعنی $V(G) = \{v, x_۱, \ldots, x_n\}$ و $E(G) = \{ux_۱, ux_۲, \ldots, ux_n\}$. قرار می‌دهیم $e_i = ux_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$. راس‌های گراف یالی $L(G)$ مجموعه‌ی یال‌های G است، یعنی $V(L(G)) = \{e_۱, \ldots, e_n\}$ است. به ازای هر i و i راس‌های e_i و e_j در $L(G)$ مجاور هستند، زیرا یال‌های e_i و e_j دارای راس مشترک u هستند. بنابراین $L(G)$ گراف کامل K_n است.

تمرین ۶.۲ نشان دهید برای $n \geq ۳$ داریم $L(C_n) \cong C_n$.

حل فرض کنید $C_n : x_۱x_۱x_۲ \cdots x_n$ یک دور به طول n باشد. قرار می‌دهیم $e_i = x_ix_{i+۱}$، $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$. راس‌های گراف یالی $L(C_n)$ مجموعه‌ی یال‌های C_n است، یعنی $V(L(C_n)) = \{e_۱, \ldots, e_n\}$ است. راس‌های e_i و e_j، $i < j$، در $L(C_n)$ مجاور هستند اگر و تنها اگر $j = i + ۱$ یا $i = ۱$ و $j = n$. پس $L(C_n) : e_۱e_۲ \cdots e_n$ یک دور به طول n است.

تمرین ۶.۳ مثالی از گراف G ارائه کنید که نشان دهد رابطه‌ی $d_{L(G)}(e) = d_G(u) + d_G(v) - ۲$ در حالتی که G دارای طوقه باشد ممکن است معتبر نباشد.

حل فرض کنید $V(G) = \{u, v\}$ و $E(G) = \{e = uv, e' = vv\}$ در این صورت $V(L(G)) = \{e, e'\}$ و $E(L(G)) = \{ee'\}$ و داریم $d_{L(G)}(e) = ۱$ و $d_G(u) + d_G(v) - ۲ = ۱ + ۳ - ۲ = ۲$ و رابطه در این حالت برقرار نیست.

تمرین ۶.۴ ثابت کنید که یک گراف همبند ساده‌ی G با گراف یالی خودش یکریختی است اگر و تنها اگر یک دور باشد.

حل طبق تمرین ۱.۷ گراف یالی C_n با C_n یکریخت است. برعکس فرض کنید G یک گراف همبند ساده n راسی باشد و $G \cong L(G)$. باید نشان دهیم G یک دور است. چون G همبند است کافی است نشان دهیم درجه‌ی هر راس G برابر ۲ است. چون $G \cong L(G)$ پس $|V(G)| = |V(L(G))|$ و در نتیجه $n = |V(G)| = |E(G)|$. چون $G \cong L(G)$. پس یک تناظر یک‌به‌یک بین دورهای G و دورهای $L(G)$ وجود دارد. فرض کنید یک راس v از G با $d_G(v) \geq ۳$ وجود داشته باشد. در این صورت یال‌های مجاور با v یک دور C در $L(G)$ تشکیل می‌دهند. اما هیچ دوری در G نمی‌تواند به C متناظر باشد، که تناقض است. پس درجه‌ی هر راس G کمتر یا مساوی ۲ است. از طرف دیگر درجه‌ی هیچ راس از G برابر ۱ نیست، زیرا اگر k راس از درجه‌ی ۱ در G وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$۲n = ۲|E(G)| = \sum_{u \in V(G)} d_G(u) = k + \sum_{i=۱}^{t} d_i \leq k + ۲t = k + t + t = n + t,$$

که در آن $(d_۱, \ldots, d_t)$ درجه‌ی اعضای G است که بیش از ۱ هستند. از رابطه‌ی بالا داریم $n \leq t$، که تناقض است.

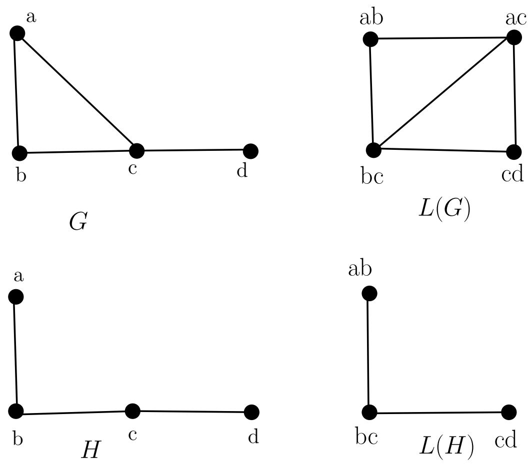
راه دیگر: فرض کنید G یک گراف همبند ساده n راسی با دنباله‌ی درجه‌ی $(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ باشد و $G \cong L(G)$. باید نشان دهیم G یک دور است. چون G همبند است کافی است نشان دهیم درجه‌ی هر راس G برابر ۲ است. چون G و $L(G)$ تعداد راس‌ها و یال‌های یکسان دارند پس $n = m$، و $m = \frac{۱}{۲}\left(\sum_{i=۱}^{n} d_i^۲\right) - m$. از این‌رو $n = m$ و $\sum_{i=۱}^{n} d_i^۲ = ۴m$. بنابراین واریانس دنباله‌ی $(d_۱, \ldots, d_n)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} Var &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} d_i^۲ - \left(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} d_i^۲\right) \\ &= \frac{۱}{n}۴m - \frac{۱}{n^۲}(۲m)^۲ = \frac{۴m}{m} - \frac{۴m^۲}{m^۲} = ۴ - ۴ = ۰. \end{aligned}$$

از این‌رو تمام d_iها مساوی هستند، یعنی G گراف منتظم از درجه‌ی مثلاً d است. بنابراین از $nd = ۲m$ نتیجه می‌گیریم که $d = \frac{۲m}{n} = \frac{۲m}{m} = ۲$.

تمرین ۶.۵ رد کنید: H زیرگراف فراگیر G نتیجه می‌دهد که $L(H)$ زیرگراف فراگیر از $L(G)$ است.

حل شکل زیر را ببینید:



تمرین ۷.۱ با مثال نشان دهید که ممکن است $G_1[G_2]$ و $G_2[G_1]$ یک‌ریخت نباشند.

حل فرض کنید G_1 و G_2 گراف‌های شکل ۱.۲۶ در کتاب باشد. در این صورت $G_1[G_2]$ در شکل ۱.۲۹ کتاب و $G_2[G_1]$ در شکل ۱.۳۰ کتاب نشان داده شده‌ند. این دو گراف یکریخت نیستند، زیرا اولی راس درجه‌ی ۲ ندارد اما دومی راس درجه‌ی ۲ دارد.

تمرین ۷.۲ ثابت کنید $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.

حل فرض کنید $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$. تابع

$$f : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2 \times V_1$$
$$(a, x) \mapsto (x, a)$$

یک تابع دوسویی از $V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2$ به $V(G_2 \times G_1) = V_2 \times V_1$ است. تنها باید نشان دهیم f مجاورت را حفظ می‌کند. دو نوع مجاورت در $G_1 \times G_2$ وجود دارد یکی برای زوج‌هایی است که مولفه‌های اول آن‌ها برابر و دیگری برای زوج‌هایی

است که مولفه‌های دوم آن‌ها برابر است. ابتدا مجاورت نوع اول را بررسی می‌کنیم (منظور از $u \sim_G v$ یعنی u و v در G مجاور هستند):

$$\begin{aligned}(a,x) \sim_{G_1 \times G_2} (a,y) &\iff x \sim_{G_2} y\\ &\iff x \sim_{G_2} y\\ &\iff (x,a) \sim_{G_2 \times G_1} (y,a).\\ &\iff f(a,x) \sim_{G_2 \times G_1} f(a,y).\end{aligned}$$

پس f مجاورت نوع اول حفظ می‌کند. اکنون مجاورت نوع دوم را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(a,x) \sim_{G_1 \times G_2} (b,x) &\iff a \sim_{G_1} b\\ &\iff b \sim_{G_1} a\\ &\iff (x,a) \sim_{G_2 \times G_1} (x,b).\\ &\iff f(a,x) \sim_{G_2 \times G_1} f(b,x).\end{aligned}$$

پس f مجاورت نوع دوم را نیز حفظ می‌کند. از این‌رو f یکریختی است.

تمرین **۷.۳** ثابت کنید $G_1 \circ G_2 \cong G_2 \circ G_1$.

حل فرض کنید $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$. تابع

$$\begin{aligned}f : V_1 \times V_2 &\longrightarrow V_2 \times V_1\\ (a,x) &\mapsto (x,a)\end{aligned}$$

یک تابع دوسویی از $V(G_1 \circ G_2) = V_1 \times V_2$ به $V(G_2 \circ G_1) = V_2 \times V_1$ است. تنها باید نشان دهیم f مجاورت را حفظ می‌کند. سه نوع مجاورت در $G_1 \times G_2$ وجود دارد یکی برای زوج‌هایی است که مولفه‌های اول آن‌ها برابر، یکی برای زوج‌هایی است که مولفه‌های دوم آن‌ها برابر، و دیگری برای زوج‌هایی است دو مولفه‌ی آن‌ها متفاوت است. بررسی دو مجاورت نوع اول و دوم مانند تمرین قبل است. ابتدا مجاورت نوع اول را

بررسی می‌کنیم:

$$(a,x) \sim_{G_1\times G_2} (a,y) \Longleftrightarrow x \sim_{G_2} y \Longleftrightarrow x \sim_{G_2} y \Longleftrightarrow (x,a) \sim_{G_2\times G_1} (y,a).$$

پس f مجاورت نوع اول حفظ می‌کند. اکنون مجاورت نوع دوم را بررسی می‌کنیم:

$$(a,x) \sim_{G_1\times G_2} (b,x) \Longleftrightarrow a \sim_{G_1} b \Longleftrightarrow b \sim_{G_1} a \Longleftrightarrow (x,a) \sim_{G_2\times G_1} (x,b).$$

پس f مجاورت نوع دوم را نیز حفظ می‌کند. در نهایت مجاورت نوع دوم را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(a,x) \sim_{G_1\times G_2} (b,y) &\Longleftrightarrow a \sim_{G_1} b \quad \text{و} \quad x \sim_{G_2} y\\ &\Longleftrightarrow b \sim_{G_1} a \quad \text{و} \quad y \sim_{G_2} x\\ &\Longleftrightarrow (x,a) \sim_{G_2\times G_1} (y,b).\end{aligned}$$

پس f مجاورت نوع سوم را نیز حفظ می‌کند. از این‌رو f یکریختی است.

تمرین ۷.۴ ثابت کنید

(الف) $n(G_1[G_2]) = n(G_2[G_1]) = n(G_1 \circ G_2) = n(G_1)n(G_2)$

(ب) $m(G_1[G_2]) = n(G_1)m(G_2) + n(G_2)^2 m(G_1)$

(ج) $m(G_1 \circ G_2) = n(G_1)m(G_2) + m(G_1)n(G_2) + 2m(G_1)m(G_2)$

(پ) $m(G_1 \otimes G_2) = 2m(G_1)m(G_2)$.

حل فرض کنید $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$.

(الف) داریم $V(G_1[G_2]) = V_1 \times V_2 = V(G_2[G_1])$ و $V(G_1 \circ G_2) = V_1 \times V_2$ از این‌رو

$$n(G_1[G_2]) = n(G_2[G_1]) = n(G_1 \circ G_2) = |V_1 \times V_2| = |V_1||V_2| = n(G_1)n(G_2).$$

(ب) داریم

$$\begin{aligned}E(G_1[G_2]) \;=\; &\{\{(a,x),(b,y)\} \mid ab \in E_1,\ \ x,y \in V_2\} \cup\\ &\{\{(a,x),(a,y)\} \mid a \in V_1,\ \ xy \in E_2\}\end{aligned}$$

و در نتیجه (چون دو مجموعه‌ی فرمول بالا مجزا هستند) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} n(G_۱[G_۲]) &= |E(G_۱[G_۲])| \\ &= |\{\{(a,x),(b,y)\} \mid ab \in E_۱, \quad x,y \in V_۲\}| + \\ &\qquad |\{\{(a,x),(a,y)\} \mid a \in V_۱, \quad xy \in E_۲\}| \\ &= |E_۱|\,|V_۲|^۲ + |V_۱|\,|E_۲| \\ &= m(G_۱)n(G_۲)^۲ + n(G_۱)m(G_۲). \end{aligned}$$

(ج) داریم

$$\begin{aligned} E(G_۱ \circ G_۲) &= \{\{(a,x),(a,y)\} \mid a \in V_۱, \quad xy \in E_۲\} \cup \\ &\qquad \{\{(a,x),(b,x)\} \mid ab \in E_۱, \quad x \in V_۲\} \cup \\ &\qquad \{\{(a,x),(b,y)\} \mid ab \in E_۱, \quad xy \in E_۲\} \end{aligned}$$

و در نتیجه (چون سه مجموعه‌ی فرمول بالا مجزا هستند) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} m(G_۱ \circ G_۲) &= |E(G_۱ \circ G_۲)| \\ &= |\{\{(a,x),(a,y)\} \mid a \in V_۱, \quad xy \in E_۲\}| + \\ &\qquad |\{\{(a,x),(b,x)\} \mid ab \in E_۱, \quad x \in V_۲\}| + \\ &\qquad |\{\{(a,x),(b,y)\} \mid ab \in E_۱, \quad xy \in E_۲\}| \\ &= |V_۱|\,|E_۲| + |E_۱|\,|V_۲| + ۲|E_۱|\,|E_۲| \\ &= n(G_۱)m(G_۲) + m(G_۱)n(G_۲) + ۲m(G_۱)m(G_۲). \end{aligned}$$

(د) طبق فرمول صفحه‌ی ۳۲ داریم $G_۱ \circ G_۲ = (G_۱ \times G_۲) \cup (G_۱ \otimes G_۲)$. در نتیجه $m(G_۱ \circ G_۲) = m((G_۱ \times G_۲) \cup (G_۱ \otimes G_۲)) = m(G_۱ \times G_۲) + m(G_۱ \otimes G_۲)$.
از این‌رو

$$m(G_۱ \otimes G_۲) = m(G_۱ \circ G_۲) - m(G_۱ \times G_۲)$$

$$\begin{aligned} &= n(G_1)m(G_2) + m(G_1)n(G_2) + 2m(G_1)m(G_2) - \\ &\qquad [n(G_1)m(G_2) + m(G_1)n(G_2)] \\ &= 2m(G_1)m(G_2). \end{aligned}$$

تمرین ۷.۵ نشان دهید که اگر G گراف همبند با حداقل دو یال باشد، آنگاه هر یال G^2 به یک مثلث تعلق دارد.

حل فرض کنید u,v یک یال از G^2 باشد. بنابراین $d_G(u,v)=1$ یا $d_G(u,v)=2$. اگر $d_G(u,v)=2$، آنگاه راس w وجود دارد که $u\sim w\sim v$ یک مسیر به طول ۲ در G است. بنابراین u، w، و v در G^2 یک مثلث تشکیل می‌دهند، و حکم ثابت است. پس فرض کنید $d_G(u,v)=1$، یعنی uv یک یال از G است. اکنون چون G حداقل دو یال دارد و همبند است، پس یک راس w مجاور با u وجود دارد. در این حالت نیز u، w، و v در G^2 یک مثلث تشکیل می‌دهند.

تمرین ۷.۶ اگر $d_G(u,v)=m$، مقدار $d_{G^k}(u,v)$ را تعیین کنید.

حل اگر $m\le k$، آنگاه طبق فرض داریم $d_G(u,v)=m\le k$، و در نتیجه طبق تعریف G^k راس‌های u و v در G^k مجاور هستند، یعنی $d_{G^k}(u,v)=1$. اکنون اگر $m\le k$، آنگاه با تقسیم k بر m اعداد طبیعی q و r وجود دارند که $m=kq+r$، که در آن $0<r<k$. از این‌رو $d_{G^k}(u,v)=q+1$. توجه کنید یک مسیر به طول k در G به یک مسیر به طول k تبدیل می‌شود. چون مسیر به طول $m=kq+r$ تعداد q مسیر متوالی به طول k و یک مسیر به طول r وجود دارد، پس $d_{G^k}(u,v)=q+1$.

تمرین‌های تکمیلی

۹.۱ نشان دهید که دنباله‌های (الف) $(7,6,5,4,3,3,2)$ و (ب) $(6,6,5,4,3,3,1)$ گرافیکی نیستند.

حل (الف) اگر G یک گراف ساده با دنباله‌ی درجه‌ی $(۲,۳,۳,۴,۵,۶,۷)$ باشد، آن‌گاه یک راس x با درجه‌ی ۷ وجود دارد. اما تنها ۶ راس دیگر در گراف وجود دارند و بنابراین درجه‌ی x حداکثر می‌تواند ۶ باشد، که تناقض است. پس چنین گرافی وجود ندارد.
(ب) اگر G یک گراف ساده با دنباله‌ی درجه‌ی $(۱,۳,۳,۴,۵,۶,۶)$ باشد، آن‌گاه دو راس x و y با درجه‌ی ۶ وجود دارند. بنابراین x و y به پنج راس دیگر وصل می‌شوند، این یعنی درجه راس‌های دیگر باید حداقل ۲ باشد، این تناقض است زیرا راس درجه‌ی ۱ در گراف وجود دارد. پس چنین گرافی وجود ندارد.

۹.۲ مثالی از یک دنباله‌ی درجه بزنید که تنها به عنوان دنباله‌ی درجه‌ی یک گراف ناهمبند محقق شود.

حل دنباله‌ی $(۰,۰,\ldots,۰)$ تنها می‌تواند دنباله‌ی درجه‌ی مکمل گراف K_n باشد، که یک گراف n راسی بدون یال است. دنباله‌ی $(۰,۱,۱)$ تنها می‌تواند دنباله‌ی درجه‌ی گراف سه راسی متشکل از یک راس تنها و یک یال بین دو راس دیگر است.

۹.۳ نشان دهید که برای یک گراف ساده‌ی دوبخشی داریم، $m \leq \frac{n^۲}{۴}$.

حل ابتدا حکم را برای گراف دوبخشی کامل $K_{p,q}$ ثابت می‌کنیم. می‌دانیم $n(K_{p,q}) = p+q$ و $m(K_{p,q}) = pq$. در نتیجه

$$\begin{aligned} m(K_{p,q}) \leq \frac{n(K_{p,q})^۲}{۴} &\iff pq \leq \frac{(p+q)^۲}{۴} \\ &\iff ۴pq \leq p^۲ + q^۲ + ۲pq \\ &\iff ۰ \leq p^۲ + q^۲ - ۲pq \\ &\iff ۰ \leq (p-q)^۲ \end{aligned}$$

و حکم برای گراف دوبخشی کامل $K_{p,q}$ درست است. اکنون حالت کلی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید G گراف دوبخشی با دوبخشی‌سازی (X,Y) باشد و $|X| = p$ و $|Y| = q$ در این صورت $n(G) = p+q$ و طبق بالا داریم

$$m = m(G) \leq m(K_{p,q}) = pq \leq \frac{(p+q)^۲}{۴} = \frac{n^۲}{۴}.$$

۹.۴ اگر δ و Δ، به ترتیب می‌نیمم و ماکسیمم درجه‌های گراف G باشند، آنگاه نشان دهید $\delta \leq \frac{۲m}{n} \leq \Delta$.

حل فرض کنید $G = (V, E)$. به ازای هر $v \in V$ داریم $\delta \leq d(v) \leq \Delta$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی اویلر به دست می‌آوریم

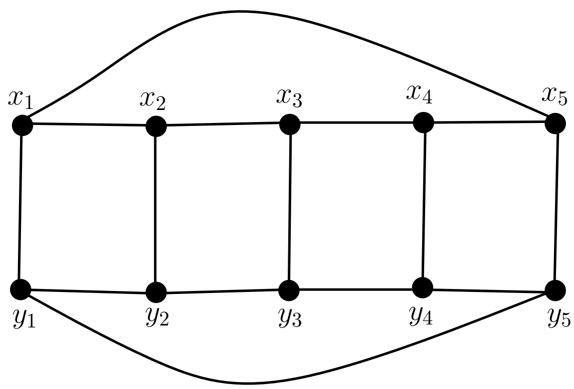
$$\begin{aligned} \delta \leq d(v) \leq \Delta \implies & \sum_{v\in V} \delta \leq \sum_{v\in V} d(v) \leq \sum_{v\in V} \Delta \\ \implies & n\delta \leq ۲m \leq n\Delta \\ \implies & \delta \leq \frac{۲m}{n} \leq \Delta. \end{aligned}$$

۹.۵ به ازای هر $n \geq ۳$، یک گراف ۳-منتظم ساده با $۲n$ راس که شامل مثلث نباشد بسازید.

حل گراف $G = (V, E)$ را به صورت زیر می‌سازیم. قرار می‌دهیم $V = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n, y_۱, y_۲, \ldots, y_n\}$ و مجموعه‌ی یال‌های G را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} E = & \{x_i y_i \mid i \leq ۱ \leq n\} \cup \{x_i x_{i+۱} \mid ۱ \leq i \leq n-۱\} \cup \\ & \{y_i y_{i+۱} \mid ۱ \leq i \leq n-۱\} \cup \{x_۱ x_n,\ y_۱ y_n\} \end{aligned}$$

در واقع یک مستطیل بزرگ که روی یک طول آن به ترتیب با راس‌های $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n برچسب‌گذاری شده است و روی طول دیگر آن به ترتیب با راس‌های $y_۱$، $y_۲$، ...، y_n برچسب‌گذاری شده است. پس از وصل این راس‌ها به صورت افقی و عمودی مستطیل بزرگ به تعداد $n - ۱$ مستطیل کوچک تقسیم می‌شود. این مستطیل‌ها متناظر سه مجموعه‌ی اول در فرمول بالا هستند. مجموعه‌ی بعد متناظر دو یال از راس ابتدای یک طول به راس انتهای همان طول است (شکل زیر را ببینید)



۹.۶ اگر یک گراف دوبخشی $G(X,Y)$ منتظم باشد، نشان دهید $|X| = |Y|$.

حل فرض کنید G گراف k-منتظم باشد و بر خلاف حکم، مثلاً $|X| > |Y|$ و $X = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_r, x_{r+۱}, \ldots\}$ و $Y = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_r\}$. در این صورت از هر عضو مجموعه‌ی $X_۱ = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_r\}$ به اعضای $Y = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_r\}$ تعداد k یال وصل می‌شود. بنابراین از $X_۱$ تعداد rk یال به Y وارد می‌شود. چون G گراف k-منتظم است و $|Y| = r$ پس به هر عضو Y تعداد k یال از اعضای $X_۱$ وصل می‌شود. از این‌رو $x_{r+۱}$ به عضوی از Y وصل نمی‌شود، که تناقض است. پس $|X| = |Y|$.

۹.۷ نشان دهید در یک گراف ساده، یک گشت بسته به طول فرد شامل یک دور است.

حل فرض این‌که G گراف ساده باشد نیازی نیست، در واقع حکم برای هر گراف دلخواه برقرار است. ضمناً می‌توان نشان داد که طول دور فرد است. فرض کنید W یک گشت بسته به طول فرد k باشد. به استقرا روی k نشان می‌دهیم W شامل یک دور به طول فرد است. اگر $k = ۱$، آن‌گاه طول W برابر ۱ است و در نتیجه W یک طوقه است. از این‌رو W دور به طول فرد ۱ است. اکنون فرض کنید هر گشت بسته به طول حداکثر $k = ۲r - ۱$ شامل یک دور باشد. فرض کنید

$$u = v_۰, e_۱, v_۱, e_۱, \ldots, e_{۲r+۱}, v_{۲r+۱} = v$$

یک گشت بسته به طول $۲r + ۱$ باشد. اگر W شامل راس تکراری نباشد، آن‌گاه W یک دور است. پس فرض کنید W دارای راس تکراری باشد، در نتیجه $۰ \leq i < j \leq ۲r + ۱$

وجود دارند که $v_i = v_j$ در این صورت W را می‌توانیم به دو گشت بسته‌ی اگر

$$v_0, \dots, v_i = v_j, \dots, v_{k+1}$$

$$v_i, \dots, e_{i+1}, \dots, v_j$$

تجزیه کنیم. یکی از این دو گشت دارای طول فرد حداکثر $2r - 1$ است، و بنابراین طبق فرض استقرا شامل یک دور به طول فرد است. پس حکم ثابت است.

یک مساله هر $u - v$ گشت شامل یک $u - v$ مسیر است.

حل فرض کنید W یک $u - v$ گشت به طول k باشد. حکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. اگر $k = 1$، آن‌گاه W یال و در نتیجه یک مسیر است. کنون فرض کنید هر $u - v$ گشت به طول حداکثر k شامل یک $u = v$ مسیر باشد. فرض کنید

$$W : \quad u = v_0, e_1, v_1, e_1, \dots, e_{k+1}, v_{k+1} = v$$

یک $u = v$ گشت به طول $k + 1$ باشد. اگر W راس تکراری نداشته باشد، آن‌گاه W یک مسیر است. پس فرض کنید W دارای راس تکراری باشد، در نتیجه $0 \le i < j \le 2r + 1$ وجود دارند که $v_i = v_j$. با حذف همه‌ی راس‌ها و یال‌های بین v_i و v_j، گشت جدید $u = v_0, \dots, v_i = v_j, \dots, v_{k+1} = v$ را به دست می‌آوریم. طول این گشت حداکثر برابر k است. پس طبق فرض استقرا شامل یک $u - v$ مسیر است.

۹.۸ مثالی از یک گراف ناهمبند ساده بزنید که دارای ω مولفه، n راس و $\frac{1}{2}(n-\omega)(n-\omega+1)$ یال باشد.

حل گراف $G = K_1 \cup K_2$ را درنظر بگیرید، G متشکل از یک راس تنها و یک یال است. در این صورت $n = 3$ و $\omega = 2$ و داریم

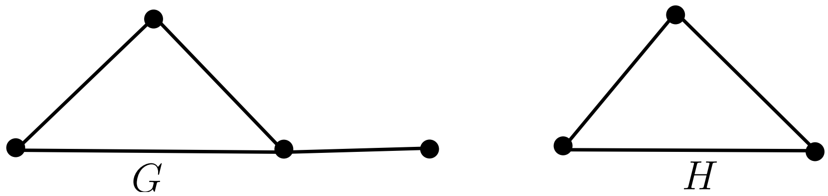
$$\frac{1}{2}(n-\omega)(n-\omega+1) = \frac{1}{2}(3-2)(3-2+1) = 1 = m(G).$$

۹.۹ اثبات یا رد کنید: اگر H زیرگراف G باشد، آن‌گاه

(الف) $\delta(H) \le \delta(G)$.

(ب) $\Delta(H) \le \Delta(G)$.

حل (الف) درست نیست. در شکل زیر داریم $\delta(H) = 2 > 1 = \delta(G)$.



(ب) درست است. یک راس $v \in V(H)$ با درجه‌ی $d_H(v) = \Delta(H)$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $\Delta(H) = d_H(v) \leq d_G(v) \leq \Delta(G)$.

۹.۱۰ نشان دهید اگر $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$، آنگاه G همبند است.

حل فرض کنید ω تعداد مولفه‌های G باشد. با توجه به فرض و قضیه‌ی ۱.۴.۸ داریم

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) < m \leq \frac{1}{2}(n-\omega)(n-\omega+1)$$

و در نتیجه $(n-1)(n-2) < (n-\omega)(n-\omega+1)$. اکنون اگر $\omega \geq 2$، آنگاه $n-\omega \leq n-2$ و $n-\omega+1 \leq n-1$ و در نتیجه

$$(n-1)(n-2) < (n-\omega)(n-\omega+1) < (n-1)(n-2),$$

که تناقض است. پس $\omega = 1$، یعنی G همبند است.

۹.۱۱ نشان دهید اگر $\delta \geq 2$، آنگاه G شامل یک دور است.

فرض کنید G_1 یک مولفه از G باشد. فرض کنید $P: \quad x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_k$ طولانی‌ترین مسیر در G_1 باشد. چون $\delta \geq 2$ پس x_1 بجز x_2 مجاور دیگری دارد. این مجاور حتماً باید از رئوس مسیر P باشد، زیرا در غیر این صورت مسیر طولانی‌تر از P به دست می‌آید. فرض کنید x_t اولین راسی در P باشد که مجاور با x_1 است. در این صورت $x_1 \sim x_2 \sim \cdots x_t \sim x_1$ یک دور است.

۹.۱۲ اگر $\delta(G) \geq 3k-1$، ثابت کنید که G شامل k دور مجزا یال است.

حل به استقرا روی k حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $k = 1$، آن گاه $\delta(G) \geq 2$ و طبق مساله‌ی قبل G شامل ۱ دور است. اکنون فرض کنید حکم برای هر گراف با

$\delta \geq ۳(k-۱)-۱$ درست باشد. فرض کنید $k \geq ۲$ و G یک گراف با $\delta(G) \geq ۳k-۱$ باشد. چون $\delta(G) \geq ۳k-۱ \geq ۲$ پس طبق مساله‌ی قبل G شامل یک دور مثل $C_۱$ است. قرار می‌دهیم $G_۱ = G - C_۱$ چون هر راس C از درجه‌ی ۲ است پس حذف $C_۱$ از G حداکثر ۲ درجه از $\delta(G)$ کم می‌کند، یعنی $\delta(G_۱) \geq \delta(G) - ۲$. از این‌رو

$$\delta(G_۱) \geq \delta(G) - ۲ \geq ۳k - ۱ - ۲ = ۳(k-۱) \geq ۳(k-۱) - ۱$$

و طبق فرض استقرا $G_۱$ شامل $k-۱$ دور مجزا-یال است که به همراه $C_۱$ تعداد k دور مجزا-یال در G به دست می‌آید.

<u>۹.۱۳</u> اگر G یک گراف ساده با دو راس آویخته باشد، ثابت کنید که G^c حداکثر دو راس آویخته دارد. مثالی از یک گراف G بزنید که هردوی G و G^c دقیقاً دو راس آویخته داشته باشند.

<u>حل</u> فرض کنید v و w دو راس آویخته از G باشند. فرض کنید x راس مجاور با v و y راس مجاور با w باشد (ممکن است $x = y$). در این صورت تنها راس‌های x و y می‌توانند در G^c راس‌های آویخته باشند، زیرا راس‌های دیگر دارای درجه‌ی حداکثر $n-۳$ در G هستند. گراف $P_۴$، که مکمل آن $P_۴^c = P_۴$ خودش است، دارای دو راس آویخته است.

مختصری درباره‌ی گروه دو وجهی: برای بررسی گروه خودریختی‌های دور C_n به دانستن مفهوم گروه دو وجهی نیاز داریم. این گروه را به طور مختصر بررسی می‌کنیم. برای دیدن مطالب بیشتر به کتاب‌های جبر (مثلاً کتاب مبانی جبر مجرد، تالیف بیژن طائری، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان) مراجعه کنید.

فرض کنید که $n \geq ۳$ و P_n یک n ضلعی منتظم باشد که مرکز آن مبدا مختصات است. یک تابع دوسویی $\varphi : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ که P_n را حفظ کند، یعنی $\varphi(P_n) = P_n$، را یک تقارن P_n می‌نامیم. در هندسه نشان داده می‌شود که تقارن‌های P_n عبارتند از : n دوران حول مبدا مختصات به اندازه‌ی

$$\frac{۲k\pi}{n}, \qquad k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$$

و n انعکاس که
(آ) اگر n فرد باشد، نسبت به خطوطی که هر راس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند.
(ب) اگر n زوج باشد، نسبت به خطوطی که دو راس مقابل و یا وسط دو ضلع مقابل را به هم وصل می‌کند.
بنابراین تقارن‌های P_n دقیقا $۲n$ تا هستند. مجموعه‌ی این تقارن‌ها تحت عمل ترکیب توابع یک گروه ناآبلی تشکیل می‌دهند که آن‌را گروه دووجهی از مرتبه‌ی $۲n$ می‌نامیم و با D_n نشان می‌دهیم (بعضی کتاب‌ها آن‌را با $D_{۲n}$ نشان می‌دهند). اگر اعضای D_n را به صورت توابع دوسویی از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}^۲$ تصور کنیم، آن‌گاه D_n یک زیرگروه $S_{\mathbb{R}^۲}$ است. اگر مجموعه‌ی راس‌های P_n را با $X = \{۱, ۲, \dots, n\}$ شماره‌گذاری کنیم و اعضای D_n را به صورت توابع دوسویی از X به X تصور کنیم، آن‌گاه D_n یک زیرگروه S_n است. فرض کنید که ρ چرخش به اندازه‌ی $\frac{۲\pi}{n}$ و ε یک انعکاس دلخواه در $D_{۲n}$ باشد. در این صورت به سادگی می‌توان دید که

$$\rho^n = \varepsilon^۲ = (\rho\varepsilon)^۲ = ۱.$$

یعنی

$$D_{۲n} = \{۱, \rho, \rho^۲, \dots, \rho^{n-۱}, \varepsilon, \varepsilon\rho, \varepsilon\rho^۲, \dots, \varepsilon\rho^{n-۱}\}.$$

اگر راس‌های n ضلعی منتظم را با ۱، ۲، …، n شماره‌گذاری کنیم، آن‌گاه دوران ρ را می‌توانیم با جایگشت $\rho = (۱\ ۲\ ۳\ \cdots\ n)$ و انعکاس ε را با $\varepsilon = (۱n)(۲\ n-۱)\cdots$، با توجه به فرد یا زوج بودن n می‌توانیم دورهای بعدی در تجزیه‌ی ε را بنویسیم، مشخص کنیم. در واقع اگر $n = ۲k - ۱$ فرد باشد، آن‌گاه $\varepsilon = (۱\ n)(۲\ n-۱)\cdots(k-۱\ k+۱)$، (و ε، k را به k تصویر می‌کند)، در واقع ε انعکاس نسبت به خط گذرنده از راس شماره‌ی ۱ و وسط ضلع مقابل آن است؛ و اگر $n = ۲k$ زوج باشد، آن‌گاه $\varepsilon = (۱\ n)(۲\ n-۱)\cdots(k-۱\ k)$، (و ε، k را به k تصویر می‌کند)، در واقع ε انعکاس نسبت به خط گذرنده از وسط ضلع با رئوس ۱ و n و ضلع با رئوس $k - ۱$ و k است؛

۹.۱۴ نشان دهید که $\Gamma(C_n)$ برابر D_n، گروه دووجهی از مرتبه‌ی $۲n$ است.

حل اگر رئوس C_n را بر روی n-ضلعی منتظم تصور کنیم، آن‌گاه بحث بالا نشان می‌دهد که $\Gamma(C_n) = D_n$.

۹.۱۵ $\Gamma(K_{p,q})$، $p \neq q$، را تعیین کنید.

حل فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ و $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$ دو بخش گراف دوبخشی کامل $K_{p,q}$ باشند. هر جایگشت روی X یک خودریختی $K_{p,q}$ است، بنابراین $S_X \subseteq \Gamma(K_{p,q})$؛ همچنین هر جایگشت روی Y نیز یک خودریختی $K_{p,q}$ است، بنابراین $S_Y \subseteq \Gamma(K_{p,q})$. از این‌رو

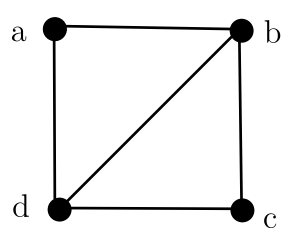
$$\{\alpha\beta \mid \alpha \in S_X, \quad \beta \in S_Y\} \subseteq \Gamma(K_{p,q}),$$

که در آن هر جایگشت $\varphi \in S_X$ را به عنوان یک جایگشت $\varphi \in S_{X \cup Y}$ تصور می‌کنیم، که اعضای Y را ثابت نگه می‌دارد؛ به همین صورت هر جایگشت $\varphi \in S_Y$ را به عنوان یک جایگشت $\varphi \in S_{X \cup Y}$ تصور می‌کنیم، که اعضای X را ثابت نگه می‌دارد.
برعکس اگر φ یک خودریختی از $K_{p,q}$ باشد، آن‌گاه چون $p \neq q$، پس φ اعضای X را بین خودشان جابجا می‌کند و اعضای Y را بین خودشان جابجا می‌کند. از این‌رو می‌توان نوشت $\varphi = \alpha\beta$ که در آن $\alpha \in S_X$ و $\beta \in S_Y$. بنابراین

$$\Gamma(K_{p,q}) = \{\alpha\beta \mid \alpha \in S_X, \quad \beta \in S_Y\}.$$

۹.۱۶ مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های (الف) $K_4 - e$؛ (ب) P_n را تعیین کنید.

حل فرض کنید $V(K_4) = \{a, b, c, d\}$ و $e = ac$ در این صورت گراف $K_4 - e$ به صورت زیر است:



با توجه به شکل واضح است که اعضای $\Gamma(K_4 - e)$ عبارتند از

$$\varphi_0 = (), \quad \varphi_1 = (a\ c), \quad \varphi_2 = (b\ d), \quad \varphi_3 = (a\ c)(b\ d).$$

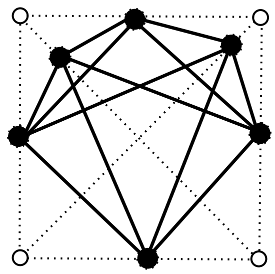
بنابراین $\Gamma(K_۴ - e)$ یک گروه ۴ عضوی است.
اکنون فرض کنید P_n مسیر n راسی $x_۱ \sim x_۲ \sim \cdots \sim x_n$ باشد. فرض کنید ϕ یک خودریختی از P_n باشد. چون تنها دو راس آویخته‌ی $x_۱$ و x_n در P_n وجود دارند پس دو حال رخ می‌دهد:
حالت اول $\phi(x_۱) = x_۱$: در این حالت چون $x_۱ \sim x_۲$ پس $\phi(x_۱) \sim \phi(x_۲)$، یعنی $x_۱ \sim \phi(x_۲)$ از این‌رو $\phi(x_۲) = x_۲$ و با همین استدلال به دست می‌آوریم $\phi(x_i) = x_i$، به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ از این‌رو $\phi = ()$ جایگشت همانی است.
حالت دوم $\phi(x_۱) = x_n$: در این حالت داریم $\phi(x_n) = x_۱$. چون $x_۱ \sim x_۲$ پس $\phi(x_۱) \sim \phi(x_۲)$، یعنی $x_n \sim \phi(x_۲)$ از این‌رو $\phi(x_۲) = x_{n-۱}$. اکنون چون $x_n \sim x_{n-۱}$ پس $\phi(x_n) \sim \phi(x_{n-۱})$، یعنی $x_۱ \sim \phi(x_{n-۱})$ از این‌رو $\phi(x_{n-۱}) = x_۲$. با ادامه‌ی این استدلال درمی‌یابیم اگر $n = ۲k + ۱$ فرد باشد، آن‌گاه $\phi = (x_۱\ x_n)(x_۲\ x_{n-۱}) \cdots (x_{k-۱}\ x_{k+۱})$، توجه کنید در این حالت داریم $\phi(x_k) = x_k$؛ و اگر $n = ۲k$ زوج باشد، آن‌گاه $\phi = (x_۱\ x_n)(x_۲\ x_{n-۱}) \cdots (x_{k-۱}\ x_k)$. در نتیجه $\Gamma(P_n)$ یک گروه ۲ عضوی است.

۹.۱۷ نشان دهید که گراف یالی K_n گراف منتظم از درجه‌ی $۲n - ۴$ است. گراف یالی $K_۴$ را رسم کنید.

حل اگر $L(G)$ گراف یالی گراف G باشد و $e = uv \in E(G)$، آن‌گاه می‌دانیم که $d_{L(G)}(e) = d_G(u) + d_G(v) - ۲$. چون درجه‌ی هر راس از K_n برابر $n - ۱$ است پس

$$d_{L(K_n)}(e) = d_{K_n}(u) + d_{K_n}(v) - ۲ = n - ۱ + n - ۱ - ۲ = ۲n - ۴.$$

گراف یالی $K_۴$ در شکل زیر نشان داده شده است. در این شکل راس‌های $K_۴$ را با دایره‌های توخالی و یال‌های آن با نقطه‌چین نشان داده شده‌اند. راس‌های $L(K_۴)$ را با دایره‌های توپر و یال‌های آن با خطوط سیاه نشان داده شده‌اند.

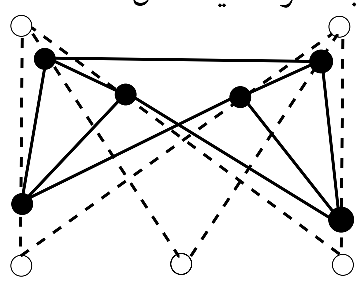


۹.۱۸ نشان دهید که گراف یالی $K_{p,q}$ گراف منتظم از درجه‌ی $p+q-۲$ است. گراف یالی $K_{۲,۳}$ را رسم کنید.

حل اگر $e=uv\in E(K_{p,q})$، آن‌گاه

$$d_{L(K_{p,q})}(e)=d_{K_{p,q}}(u)+d_{K_{p,q}}(v)-۲=p+q-۲.$$

گراف یالی $K_{۲,۳}$ در شکل زیر نشان داده شده است. در این شکل راس‌های $K_{۲,۳}$ را با دایره‌های توخالی و یال‌های آن با نقطه‌چین نشان داده شده‌اند. راس‌های $L(K_{۲,۳})$ را با دایره‌های توپر و یال‌های آن با خطوط سیاه نشان داده شده‌اند.



۹.۱۹ نشان دهید که یک گراف همبند G دوبخشی کامل است اگر و تنها اگر هیچ زیرگراف القایی G برابر $K_۳$ یا $P_۴$ نباشد.

حل ($\Longleftarrow$) فرض کنید G دوبخشی کامل، با دوبخشی‌سازی X و Y، باشد. باید نشان دهیم G زیرگراف القایی برابر $K_۳$ یا $P_۴$ ندارد. مجموعه‌ی $\{a,b,c\}$ متشکل از ۳ راس را در نظر می‌گیریم. زیرگراف القایی $G[\{a,b,c\}]$ را در نظر می‌گیریم. اگر ab یک یال باشد، آن‌گاه چون راس‌های واقع در یک بخش به هم وصل نمی‌شوند، پس a در یک بخش، مثلاً X، و b در یک بخش دیگر، مثلاً Y، قرار می‌گیرند. اکنون اگر ac یک یال

باشد، آن‌گاه c باید در Y قرار گیرد. در این صورت bc یک یال نیست. پس زیرگراف القایی $G[\{a,b,c\}]$ برابر $K_۳$ نیست.
اکنون مجموعه‌ی $\{a,b,c,d\}$ متشکل از ۴ راس را در نظر می‌گیریم. فرض کنید زیرگراف القایی $G[\{a,b,c,d\}]$ برابر $P_۴:\ a \sim b \sim c \sim d$ باشد. فرض کنید $a \in X$. در این صورت، چون راس‌های واقع در یک بخش به هم وصل نمی‌شوند، پس $b \in Y$، $c \in X$، و $d \in Y$. اما این ممکن نیست زیرا G دوبخشی کامل است و a باید به d وصل شود. پس زیرگراف القایی $G[\{a,b,c,d\}]$ برابر $P_۴$ نیست.
$(\Longrightarrow)$ ابتدا به استقرا روی k نشان می‌دهیم که G شامل هیچ دور به طول $۲k+۱$ ندارد. چون G شامل $C_۳$ (به عنوان زیرگراف القایی) نیست، پس G شامل ۳-دور نیست، یعنی حکم برای $k=۱$ برقرار است. اکنون فرض کنید $k>۲$ و G شامل هیچ دور به طول ۳، ۵، ...، $۲k-۱$ نباشد. باید نشان دهیم G شامل $۲k+۱$-دور نیست. فرض کنید چنین نباشد و G شامل یک دور C به طول $۲k+۱$ باشد. اگر یک یال e از G وجود داشته باشد به طوری با با دو راس نامجاور از C مجاور باشد، آن‌گاه G شامل دو دور $C_۱$ و $C_۲$ با طول کمتر است. یال e را طوری انتخاب می‌کنیم که طول $C_۱$ می‌نیمم باشد. اکنون طبق فرض استقرا طول‌های $C_۱$ و $C_۲$ فرد نیستند. اما در این صورت $C_۱$ و در نتیجه G شامل $P_۴$ به عنوان زیرگراف القایی است، که متناقض با فرض است.
پس G شامل دور به طول فرد نیست، یعنی G دوبخشی است. فرض کنید X و Y مجموعه‌های بخشی G باشند. اگر $|X|=۱$ یا $|Y|=۱$، آن‌گاه همبند بودن G نتیجه می‌دهد که G کامل است. پس فرض کنید $|X|>۱$ و $|Y|>۱$. باید نشان دهیم هر راس از X با هر راس از Y مجاور است. فرض کنید چنین نباشد و $x \in X$ و $y \in Y$ وجود داشته باشند که $xy \notin E(G)$. چون G همبند است، یک $x-y$ مسیر با طول می‌نیمم مانند P در G وجود دارد. چون x و y در مجموعه‌های بخشی متفاوت هستند پس طول P فرد است. علاوه بر آن چون $xy \notin E(G)$، طول P حداقل برابر ۳ است. فرض کنید $P:\ x \sim y' \sim x' \sim y'' \sim \cdots \sim y$، که در آن $y' \neq y$ و ممکن است تساوی $y''=y$ برقرار باشد. چون طول P می‌نیمم است، پس $xy'' \notin E(G)$. همچنین x و x' به یک مجموعه‌ی بخشی متعلق هستند و بنابراین $xx' \notin E(G)$. به طریق مشابه

$y'y'' \notin E(G)$ از این‌رو نتیجه می‌گیریم که زیرگراف القا شده توسط $\{x, y, x', y''\}$ یک مسیر به طول ۴ است، که تناقض است.

۹.۲۰ نشان دهید که اگر G گراف همبند باشد و $\operatorname{diam}(G) \geq 3$، که در آن $\operatorname{diam}(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}$، آنگاه G^c همبند است و $\operatorname{diam}(G^c) \leq 3$. به ویژه یک گراف خود-مکمل دارای قطر ۲ یا ۳ است.

حل چون $\operatorname{diam}(G) \geq 3$ پس دو راس u و v از G وجود دارند که $d_G(u, v) \geq 3$ و در نتیجه $d_{G^c}(u, v) = 1$. اکنون فرض کنید x و y دو راس دلخواه باشند. طبق فرض u و v در G با x مجاور نیستند، و در نتیجه $d_{G^c}(u, x) = 1$ یا $d_{G^c}(v, x) = 1$. فرض کنید بدون کم شدن از کلیت اولین تساوی برقرار باشد. به طریق مشابه نتیجه $d_{G^c}(u, y) = 1$ یا $d_{G^c}(v, y) = 1$. بنابراین در G^c یک مسیر xuy یا xuy وجود دارد و در نتیجه $d_{G^c}(x, y) \leq 3$. اکنون فرض کنید G یک گراف نابدیهی خود-مکمل باشد. هر گراف نابدیهی دارای قطر $d \geq 1$ است، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G کامل باشد. اگر G خود-مکمل باشد، آنگاه G نمی‌تواند کامل باشد و در نتیجه $d \geq 2$. چون قطر تحت یکریختی پایا است پس $\operatorname{diam}(G) = \operatorname{diam}(G^c)$. اکنون دو امکان وجود دارد: یا $\operatorname{diam}(G) = 2$ یا $\operatorname{diam}(G^c) \geq 3$. در حالت اخیر، بحث بالا نشان می‌دهد که $\operatorname{diam}(G) = \operatorname{diam}(G^c) \leq 3$ و در نتیجه $\operatorname{diam}(G) = 3$.

۹.۲۱ نشان دهید که مکمل یک گراف ساده و همبند G همبند است اگر و تنها اگر G شامل هیچ زیرگراف فراگیر دوبخشی کامل نباشد.

حل $(\Longrightarrow)$ فرض کنید G شامل هیچ زیرگراف فراگیر دوبخشی کامل نباشد. نشان می‌دهیم G^c همبند است. فرض کنید G^c ناهمبند باشد و H_1 یک مولفه‌ی G^c باشد. قرار می‌دهیم $H_2 = G^c - H_1$ در این صورت بین راس‌های H_1 و H_2 هیچ مجاورتی در در G^c نیست، پس هر راس H_1 به هر راس H_2 در G مجاور است. از این‌رو با در نظر گرفتن این یال‌ها یک زیرگراف فراگیر دوبخشی کامل از G به دست می‌اید، که تناقض است. پس G^c همبند است.

($\Longleftarrow$) فرض کنید G^c همبند باشد. نشان می‌دهیم G شامل هیچ زیرگراف فراگیر دوبخشی کامل نیست. فرض کنید چنین نباشد و یک زیرگراف فراگیر دوبخشی کامل H با دوبخشی‌سازی (X, Y) از G وجود داشته باشد. در این صورت چون هر راس از X و هر راس از Y با هم در G مجاور هستند، پس در G^c هیچ بین راس‌های X و Y هیچ مجاورتی در G^c نیست، یعنی G^c ناهمبند است، که تناقض است. پس G شامل هیچ زیرگراف فراگیر دوبخشی کامل نیست.