کتاب درسی نظریه گراف

بالاکریشنان و رانگاناتهان

(حل تعدادی از تمرین‌های فصل‌های ٤ و ٥)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

خوانندگان گرامی در صورتی که برای یک مساله حل دیگری دارید، یا حل مساله‌ای ایراد دارد، یا حل داده شده برای یک مساله مبهم است، یا برای مساله‌ای که حل آن نیامده راه حلی دارید، لطفاً با اینجانب تماس بگیرید.

web: http://taeri.iut.ac.ir

e-mail: b.taeri@cc.iut.ac.ir

تاریخ آخرین ویرایش: پانزده شهریور ۱۳۹۲

فصل ۴

درخت‌ها

تمرین ۱.۱ مثالی از یک گراف با n راس و $n - ۱$ یال بزنید که درخت نباشد.

حل شکل زیر را ببینید

تمرین ۱.۲ نشان دهید که یک گراف ساده با ω مولفه یک جنگل است اگر و تنها اگر $m = n - \omega$.

حل فرض کنید $G_۱$، $G_۲$، ...، G_ω مولفه‌های گراف G باشند و $n(G_i) = n_i$ و $m(G_i) = m_i$. اگر G یک جنگل باشد، آن‌گاه هر G_i یک درخت است. بنابراین به ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, \omega$، داریم $m_i = n_i - ۱$. پس

$$m = \sum_{i=۱}^{\omega} m_i = \sum_{i=۱}^{\omega}(n_i - ۱) = \sum_{i=۱}^{\omega} n_i - \sum_{i=۱}^{\omega} ۱ = n - \omega.$$

برعکس فرض کنید $m = n - \omega$. نشان می‌دهیم که هر G_i یک درخت است. فرض کنید T_i یک درخت فراگیر برای G_i باشد. در این صورت $H = \bigcup_{i=۱}^{\omega} T_i$ یک جنگل فراگیر برای G است چون

$$m(H) = \sum_{i=۱}^{\omega} m(T_i) = \sum_{i=۱}^{\omega}(n(T_i) - ۱) = n(H) - \omega = n - \omega = m(G)$$

پس $G = H$.

تمرین ۱.۳ یک راس v از درخت T با حداقل سه راس یک راس برشی است اگر و تنها اگر v راس آویخته نباشد.

حل عکس نقیض گزاره (که معادل آن است) و عبارت است از «یک راس v از درخت T با حداقل سه راس یک راس برشی نیست اگر و تنها اگر v راس آویخته باشد» را ثابت می‌کنیم. اگر یک راس v راس آویخته از یک گراف همبند باشد، آنگاه واضح است که v راس برشی نیست. پس یک قسمت از گزاره برای هر گراف همبند درست است. اکنون فرض کنید v یک راس غیر برشی از درخت T باشد. پس $T - v$ همبند است. اگر v راس آویخته نباشد، آنگاه دو راس مانند x و y مجاور با v وجود دارند. چون T دخت است پس بین x و y در T یک مسیر یکتا وجود دارد، و این مسیر شامل v است. پس بین x و y در $T - v$ مسیری وجود ندارد. یعنی $T - v$ ناهمبند است.

تمرین ۱.۴ نشان دهید هر درخت گراف دوبخشی است.

حل یک درخت دور ندارد، بنابراین دور فرد نیز ندارد و در نتیجه طبق قضیه‌ی ۱.۴.۱۰ دوبخشی است.

تمرین ۱.۵ اگر برای یک گراف ساده‌ی G، داشته باشیم $m(G) \geq n(G)$، ثابت کنید که G شامل یک دور است.

حل اگر برخلاف حکم، G دارای دور نباشد، آنگاه G یک جنگل است. فرض کنید ω تعداد مولفه‌های G باشد. در این صورت طبق تمرین ۱.۲ از صفحه‌ی ۸۴ داریم $m = n - \omega < n$، که تناقض است.

تمرین ۱.۶ ثابت کنید که هر یال گراف همبند G که شامل طوقه نباشد در یک درخت فراگیر G قرار دارد.

حل فرض کنید T یک درخت فراگیر دلخواه از G باشد. اگر T شامل یال e نباشد، آنگاه طبق لم ۴.۱.۹، گراف $T + e$ یک دور یکتا دارد. با حذف یکی از یال‌های این دور

به غیر از e یک درخت فراگیر شامل e به دست می‌آید.

تمرین ۱.۷ نشان دهید گزاره‌های زیر معادل هستند:
(۱) G همبند است و تک‌دوری (یعنی، G شامل دقیقاً یک دور است).
(۲) G همبند است و $m = n$.
(۳) به ازای یک یال e از G، گراف $G - e$ درخت است.
(۴) G همبند است و مجموعه‌ی یال‌های G که یال برشی نیستند یک دور تشکیل می‌دهند.

حل (۱) $\Longleftarrow$ (۲) فرض کنید G گراف همبند با دور یکتای C باشد. فرض کنید e یک یال دلخواه از C باشد. در این صورت $G - e$ یک گراف همبند و بدون دور است. در نتیجه $G - e$ یک درخت است و طبق قضیه‌ی ۴.۱.۴ داریم $m(G-e) = n(G-e) - 1$. چون $m(G-e) = m(G) - 1$ و $n(G-e) = n(G)$ به دست می‌آوریم $m(G) - 1 = n(G) - 1$، یعنی $m(G) = n(G)$.
(۲) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنید G گراف همبند باشد و $m(G) = n(G)$. در این صورت قضیه‌ی ۴.۱.۴، گراف G درخت نیست. از این‌رو شامل یک دور C است. یال دلخواه e از C را انتخاب می‌کنیم. در این صورت چون $G - e$ همبند است و $m(G-e) = n(G-e) - 1$، پس قضیه‌ی ۴.۱.۴، گراف $G - e$ درخت است.
(۳) $\Longleftarrow$ (۴) فرض کنید به ازای یک یال e، گراف $G - e$ یک درخت باشد. پس G یک گراف همبند است که درخت نیست. از این‌رو G شامل یک دور است. این دور یکتا است و هر یال غیربرشی را دارد.
(۴) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنید G همبند باشد و مجموعه‌ی یال‌های G که یال برشی نیستند یک دور C تشکیل دهند. در این صورت C یک دور یکتا است. زیرا اگر G شامل دور دیگری مثل C_1 باشد، آن‌گاه چون در واقع چون هر یال از یک دور یال برشی نیست، پس طبق فرض هر یال از C_1 باید یک یال از C باشد، یعنی $C = C_1$.

تمرین ۲.۱ درختی با ۸۵ راس بسازید که دارای $\Delta = 5$ باشد و مرکز آن شامل فقط یک راس باشد.

حل با توجه به اثبات قضیه‌ی ژردان واضح است که مرکز مسیر P_n شامل یک راس است اگر و تنها اگر n فرد باشد. یک مسیر $P: x_1x_2\cdots x_{79}x_{80}x_{81}$ با ۸۱ راس را در نظر می‌گیریم و به راس x_{79} پنج یال آویخته متصل می‌کنیم. درخت حاصل دارای مرکز یک راسی است. در واقع مطابق اثبات قضیه‌ی ژردان پس از حذف یال‌ها آویخته از این درخت مسیر $P_1: x_2x_3\cdots x_{80}$ به دست می‌آید که مرکز آن (که با مرکز این درخت یکی است) یک راسی است.

تمرین ۲.۲ نشان دهید که یک خودریختی یک درخت روی تعداد فرد ($n \geq 3$) راس یک راس را ثابت نگه می‌دارد، یعنی به ازای هر خودریختی f از یک درخت T با $n = 2k+1$ ($k \geq 1$) راس، یک راس v از T با $f(v) = v$ وجود دارد. (راهنمایی: از این حقیقت که f راس‌های پایانی T را جابجا می‌کند استفاده کند.)

حل قرار می‌دهیم $T = T_0$. راس‌های آویخته از T_0 را حذف می‌کنیم و درخت T_1 را به دست می‌آوریم، راس‌های آویخته از T_1 را حذف می‌کنیم و درخت T_2 را به دست می‌آوریم، و این روند را ادامه می‌دهیم. در نهایت در یک مرحله‌ی r یا یک راس یا یک دو راس با یک یال e بین آن‌ها به دست می‌آید راس‌های مرکزی T). چون هر خودریختی راس‌های آویخته را به راس‌های آویخته نظیر می‌کند، پس f هر T_i را به T_i نظیر می‌کند. اگر مرکز T مشتمل بر یک راس باشد، حکم ثابت است. پس فرض کنید مرکز T شامل ۲ راس باشد. اگر f هردوی آن‌ها ثابت نگه دارد، باز هم حکم ثابت است، پس فرض کنید f دو راس مرکزی را جابجا کند، پس e را ثابت نگه می‌دارد. نشان می‌دهیم این وضعیت ممکن نیست. گراف $T - e$ دارای دو مولفه است. f این دو مولفه را جابجا می‌کند. اما این ممکن نیست زیرا $T = T_0$ دارای تعداد فردی راس است و بنابراین تعداد راس‌ها در دو مولفه از نظر توازن متفاوت هستند (یکی زوج و یکی فرد).

یک مساله نشان دهید که یک خودریختی از یک درخت یا یک راس یا یک یال را ثابت نگه می‌دارد.

حل ابتدا توجه می‌کنیم که تحت یک خودریختی فاصله حفظ می‌شود. در واقع فرض کنید f یک خودریختی از گراف G باشد. فرض کنید $x, y \in V(G)$ و

$P: \ x = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_k = y$ یک $x-y$ مسیر در G باشد. در این صورت $f(P): \ f(x) = f(x_0) \sim f(x_1) \sim \cdots \sim f(x_k) = f(y)$ یک $f(x)-f(y)$ مسیر در G است. علاوه بر آن طول P و $f(P)$ یکسان هستند. پس طول کوتاهترین $x-y$ مسیر و کوتاهترین $f(x)-f(y)$ مسیر یکسان هستند، یعنی $d(x,y) = d(f(x), f(y))$. به ویژه یک خودریختی مجموعه‌ی راس‌های مرکزی را به مجموعه‌ی راس‌های مرکزی تصویر می‌کند. اکنون فرض کنید G یک درخت باشد. طبق قضیه ژردان مرکز G یا شامل یک راس مانند x یا شامل دو راس مجاور مانند x، y است. در حالت اول f راس x را ثابت نگه می‌دارد و در حالت دوم f یال xy را ثابت نگه می‌دارد.

تمرین ۲.۴ مثالی بزنید

(۱) از یک درخت که دقیقاً یک راس مرکزی که راس مرکز ثقلی نیز باشد؛

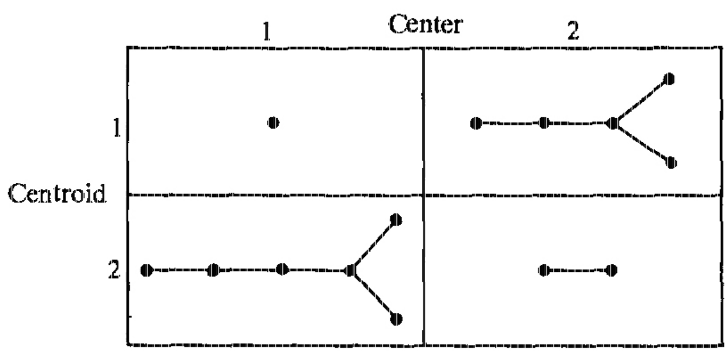
(۲) از یک درخت با دو راس مرکزی، که یکی از آن‌ها راس مرکز ثقلی نیز باشد؛

(۳) از یک درخت با دو راس مرکز ثقل، که یکی از آن‌ها راس مرکزی نیز باشد؛

(۴) از یک درخت با دو راس مرکزی، که هیچ‌کدام آن‌ها راس مرکز ثقلی نباشند؛

(۵) از یک درخت با مرکز و مرکز ثقل مجزا.

حل در شکل زیر کوچکترین درخت‌ها با یک یا دو راس مرکزی و یک یا دو مرکز تقل نشان داده شده‌اند



چندتمرین

تمرین ۶.۱ نشان دهید که هر درخت مرتبه‌ی n به ازای هر $m \leq n$ شامل یک زیردرخت از مرتبه‌ی m است.

حل فرض کنید که T یک درخت n راسی باشد. در این صورت یک یال آویخته مانند e در T وجود دارد. از این‌رو $T_1 = T - e$ یک زیردرخت $n - 1$ راسی از T است. اکنون می‌توان حکم را ادامه‌ی این فرایند ثابت کرد.

تمرین ۶.۲ فرض کنید که u، v، w سه راس یک درخت T باشند. نشان دهید که یا u، v، w هر سه در یک مسیر از T قرار دارند یا در غیر این صورت راس z از T وجود دارد که در $u - v$، $v - u$، $w - v$ مسیرهای T مشترک است.

حل فرض کنید P یکتا مسیری باشد که u را به v وصل می‌کند. اگر w در این مسیر باشد، آن‌گاه حکم ثابت است.
پس فرض می‌کنیم w در P نباشد. اکنون فرض کنید Q_1 و Q_2 یکتا مسیرهایی باشند که w را، به ترتیب، به u و v وصل می‌کنند. ادعا می‌کنیم Q_1 و P یک راس مشترک غیر از u دارند. فرض کنید ادعا درست نباشد و u تنها راس مشترک P و Q_1 باشد. فرض کنید x اولین راس مشترک P (P را از u به v طی می‌کنیم) و Q_2 باشد (این راس ممکن است v باشد). در این صورت $x - u$ بخش P به همراه $w - x$ بخش Q_2 و Q_1 یک دور در T تشکیل می‌دهند که تناقض است.
بنابراین Q_1 و P یک راس مشترک مانند z_1 غیر از u دارند. به همین صورت Q_2 و P یک راس مشترک مانند z_2 غیر از v دارند. اگر $z_2 \neq z_1$، آن‌گاه $z_2x - z_1$ بخش P به همراه $w - z_2$ بخش Q_2 و $z_1 - w$ بخش Q_1 یک دور در T تشکیل می‌دهند که تناقض است. پس $z_1 = z_2$.

تمرین ۶.۳ نشان دهید که در یک درخت، تعداد راس‌های حداقل از درجه‌ی ۳ حداکثر برابر تعداد راس‌های پایانی منهای ۲ است.

حل اگر $\Delta \leq ۲$ حکم واضح است. پس فرض کنید $\Delta \geq ۳$. فرض کنید T یک درخت نابدیهی n راسی و n_i تعداد راس‌های درجه‌ی i باشد. قرار می‌دهیم $U = \{x \in V(T) \mid d(x) \geq ۳\}$، یعنی U مجموعه‌ی همه‌ی راس‌ها با درجه حداقل ۳ است. بنابر این $|U| = n_۳ + n_۴ + \cdots + n_\Delta$. باید نشان دهیم $|U| \leq n_۱ - ۲$.
داریم $n = n_۱ + \cdots + n_\Delta$، و در نتیجه طبق فرمول $۲m = \sum_{v \in V(T)} d(v)$ و این‌که $m = n - ۱$ (چون T یک درخت است) داریم

$$\begin{aligned}
۲(n-۱) &= n_۱ + ۲n_۲ + \cdots + \Delta n_\Delta \\
&= -n_۱ + ۲(n_۱ + n_۲ + \cdots + n_\Delta) + (n_۳ + \cdots + (\Delta - ۲)n_\Delta) \\
&= -n_۱ + ۲n + (n_۳ + \cdots + (\Delta - ۲)n_\Delta).
\end{aligned}$$

از این‌رو

$$n_۱ - ۲ = n_۳ + \cdots + (\Delta - ۲)n_\Delta \geq n_۳ + n_۴ + \cdots + n_\Delta = |U|$$

و حکم ثابت است.

یک مساله فرض کنید T یک درخت نابدیهی n راسی باشد. فرض کنید n_i تعداد راس‌های درجه‌ی i باشد. در این صورت
(الف) $n_۱ \geq \Delta$ و اگر $n_۱ = ۲$، آن‌گاه T یک مسیر است.
(ب) اگر $\Delta \geq ۳$، آن‌گاه به ازای هر $i \geq ۳$ داریم $n_۱ \geq n_i + ۲$.
(ج) اگر $U = \{x \in V(T) \mid d(x) \geq ۳\}$، آن‌گاه $n_۱ = ۲ + \sum_{x \in U}(d(x) - ۲)$.

حل (الف) فرض کنید x یک راس با درجه‌ی k با راس‌های مجاور $v_۱$، ...، v_k باشد. فرض کنید P_i طولانی‌ترین مسیر با یال آغازی xv_i باشد. راس x در همه‌ی P_iها مشترک است. چون T دارای دور نیست پس P_i و P_j، $i \neq j$، راس مشترک دیگری ندارند و بنابراین راس پایانی P_i باید یک راس آویخته باشد. از این‌رو $n_۱ \geq d(x)$، به ازای هر $x \in V(T)$. راه دیگر: فرض کنید $(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ دنباله ی درجه‌ی T باشد، به طوری‌که $d_۱ \geq d_۲ \geq \cdots \geq d_n \geq ۱$. فرض کنید r تعداد راس‌های آویخته باشد. در این صورت برای $i = n-r+۱, n-r+۲, \ldots, n-r+r$ داریم $d_i = ۱$؛ و برای

$i = ۱, \ldots, n-r$ داریم $d_i \geq ۲$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} ۲(n-۱) &= d_۱ + d_۲ + \cdots + d_{n-r} + d_{n-r+۱} + \cdots + d_n \\ &= d_۱ + (d_۲ + \cdots + d_{n-r}) + r \\ &\geq d_۱ + ۲(n-r-۱) + r \\ &= d_۱ + ۲(n-۱) - r. \end{aligned}$$

درر نتیجه $۲(n-۱) \geq d_۱ + ۲(n-۱) - r$ و بنابراین به دست می‌آوریم $۰ \geq d_۱ - r$، یعنی $r \geq d_۱$. اکنون به ازای هر راس v با $d(v) = k$ داریم $r \geq d_۱ \geq k$، یعنی حداقل k راس آویخته وجود دارد.

سایر قسمت‌ها با روش مساله قبل ثابت می‌شود.

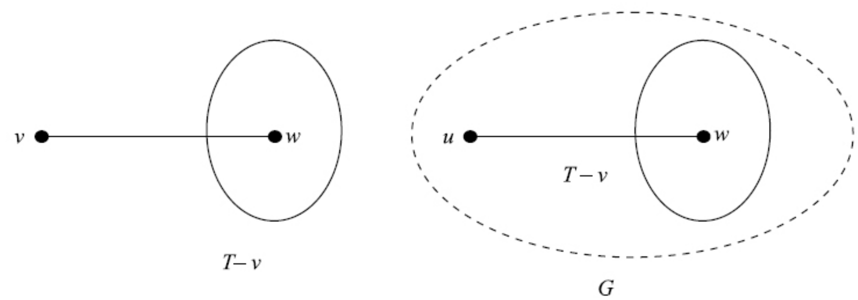
تمرین ۶.۴ نشان دهید که اگر G گراف همبند با حداقل سه راس باشد، آنگاه G شامل دو راس u و v است به طوری که $G - \{u, v\}$ نیز همبند است.

حل ابتدا فرض کنید G یک درخت باشد. در این صورت G دارای حداقل دو راس آویخته مانند u و v است. در این حالت واضح است که $G - \{u, v\}$ همبند است. اکنون فرض کنید G درخت نباشد. در این صورت G شامل یک دور C به طول حداقل ۳ است. اگر $G = C$، آنگاه چون حذف دو راس مجاور از یک دور به یک گراف همبند منجر می‌شود، حکم ثابت است. اگر $G \neq C$، آنگاه چون G همبند است پس یک یال مجاور با یک راس x از C وجود دارد. واضح است فرض کنید uv یالی از C باشد به طوری‌که $x \neq u$ و $x \neq v$. در این صورت واضح است که $G - \{u, v\}$ همبند است.

تمرین *۶.۵ اگر H یک گراف با درجه‌ی می‌نیمم حداقل $k - ۱$ باشد، آنگاه ثابت کنید که H شامل هر درخت روی k راس است. (راهنمایی: از استقرا روی k استفاده کنید.) (مرجع [۵۷] را ببینید.)

حل فرض کنید T یک درخت k راسی باشد. نشان می‌دهیم T زیرگرافی از H است (با یک زیرگراف از H یکریخت است). به استقرا روی k حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $k = ۱$، آنگاه $T = K_۱$ و روشن است $K_۱$ زیرگراف هر گراف دلخواه است. علاوه بر آن

اگر $k = ۲$، آن گاه $T = K_۲$ و $K_۲$ زیرگراف هر گراف با درجه‌ی می‌نیمم ۱ است. اکنون فرض کنید نتیجه برای همه ی درخت‌های k راسی ($k \geq ۲$) درست باشد و T را یک درخت با $k + ۱$ راس در نظر می‌گیریم. می‌دانیم T حداقل دو راس آویخته دارد. فرض کنید v یک راس آویخته از T و w راس مجاور آن باشد. گراف $T - v$ یک درخت با k راس است. بنابراین طبق فرض استقرا $T - v$ یک زیرگراف از H است (با یک زیرگراف از H یکریخت است). می‌توانیم تصور کنیم که عملاً $T - v$ در H باشد (این یعنی w راسی از H نیز باشد). چون H حداقل $k + ۱$ راس و $T - v$ شامل k راس است، پس راس‌هایی از H وجود دارند که بخشی از $T - v$ نیستند. علاوه بر آن چون درجه‌ی w در H حداقل k است، پس یک راس u از H وجود دارد که در $T - v$ نیست و با w مجاور است. زیرگراف $T - v$ به همراه u درخت T را به عنوان یک زیرگراف از H تشکیل می‌دهد (شکل زیر را ببینید).



تمرین ۶.۷ نشان دهید که یک گراف ساده و همبند حداقل $m - n + ۱$ دور متمایز دارد.

حل فرض کنید G یک گراف همبند با n راس و m یال باشد. به استقرا روی $k = m-n+۱$ حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $k = ۰$، آنگاه $m = n - ۱$ و در نتیجه G یک درخت و بدون دور است. اکنون فرض کنید $k \geq ۲$ و حکم برای همه‌ی گراف‌های همبند H با $m(H)-n(H)+۱ < k$ درست باشد و G را یک گراف همبند با $k = m-n+۱$ در نظر می‌گیریم. چون $m \neq n - ۱$ پس G درخت نیست و در نتیجه شامل یک دور C است. فرض کنید e یک یال از C باشد. در این صورت $H = G - e$ یک گراف همبند است و $m(H) - n(H) + ۱ = m(G) - ۱ - n(G) + ۱ = m - n < k$. از این‌رو

طبق فرض استقرا H حداقل شامل $m-n$ دور است. این $m-n$ دور به همراه C حداقل $m-n+۱$ دور در G هستند.

تمرین ۶.۸ ثابت کنید که، به ازای یک گراف همبند G، داریم $r(G) \leq \text{diam }(G) \leq ۲r(G)$. (شکل ۳.۴ نشان می‌دهد که نامساوی ممکن است اکید باشد.)

حل یادآوری می‌کنیم که

$$r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x,y) \quad \text{و} \quad \text{diam }(G) = \max_{x \in V} \max_{y \in V} d(x,y).$$

بنابراین شعاع می‌نیمم مجموعه‌ی $\{d(x,y) \mid y \in V\}$ و قطر ماکسیمم این مجموعه است، پس

$$r(G) \leq \text{diam }(G).$$

اکنون فرض کنید که x راس مرکزی از G باشد. طبق تعریف شعاع به ازای هر $u,v \in V$ داریم

$$d(u,x) \leq r(G) \quad \text{و} \quad d(v,x) \leq r(G),$$

و در نتیجه طبق نامساوی مثلث داریم

$$d(u,v) \leq d(u,x) + d(v,x) \leq r(G) + r(G) = ۲r(G).$$

چون u و v راس‌های دلخواه هستند، نتیجه می‌گیریم که

$$\text{diam }(G) \leq ۲r(G).$$

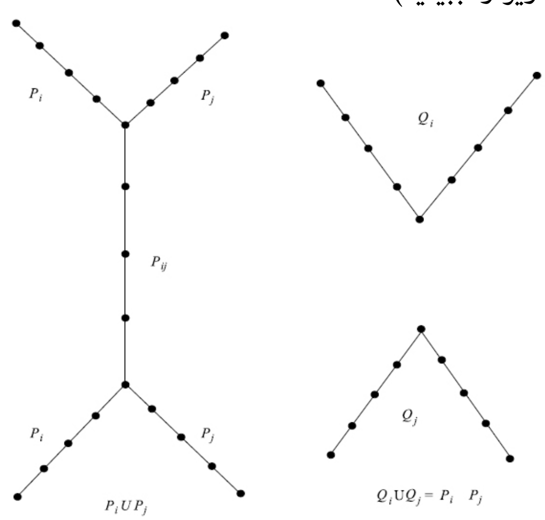
تمرین ۶.۹ ثابت کنید که یک درخت با حداقل سه راس دارای قطر ۲ است اگر و تنها اگر یک ستاره باشد.

حل واضح است که ستاره‌ی $K_{۱,n}$ دارای قطر ۲ است. اکنون فرض کنید T یک درخت با قطر ۲ باشد. راس آویخته‌ی دلخواه u از T را در نظر می‌گیریم. چون قط T برابر ۲ است پس راس w وجود دارد که $d(u,w) = ۲$ و در نتیجه یک مسیر uvw در T وجود دارد. اکنون راس دلخواه x را در نظر می‌گیریم چون قطر G برابر ۲ است پس x نمی‌تواند

به u یا w متصل باشد، زیرا در عیر این صورت مسیری به طول ۳ در T به دست می‌آید. از طرف دیگر x باید به v متصل باشد، زیرا در عیر این صورت مجدداً مسیری به طول ۳ در T به دست می‌آید. بنابراین T یک ستاره با راس مرکزی v است.

یک مساله فرض کنید T یک درخت با حداقل دو راس باشد و $|V(T)| = ۲k$، که در آن $k \geq ۱$. در این صورت یک مجموعه متشکل از k مسیر مجزا-یال وجود دارد که راس‌های پایانی آن‌ها همه‌ی راس‌های T هستند.

حل به وضوح k مسیر در T وجود دارند که راس‌های پایانی آن‌ها اعضای $V(T)$ هستند. فرض کنید $\mathscr{P} = \{P_۱, P_۲, \ldots, P_k\}$ مجموعه‌ای از چنین مسیرهایی باشد به طوری‌که مجموع طول آن‌ها می‌نیمم است. ادعا می‌کنیم که مسیرهای $\mathscr{P}$ مجزا-یال هستند. فرض کنید این ادعا درست نباشد و دو مسیر P_i و P_j، $i \neq j$، با یک یال مشترک وجود داشته باشند. بنابراین تفاضل متقارن $P_i \Delta P_j$ برابر اجتماع دو مسیر مجزا، مثلاً $Q_۱$ و $Q_۲$ است، که راس‌های پایانی آن‌ها زوج مجزا از راس‌های متعلق به $V(T)$ است (شکل زیر را ببینید).



اگر P_i و P_j را با Q_i و Q_j جایگزین کنیم، آن‌گاه مجموعه‌ی به دست آمده از یال‌ها دارای این خاصیت است که راس‌های پایانی آن‌ها همه‌ی راس‌های T هستند و مجموع طول آن‌ها از مجموع طول مسیرهای در $\mathscr{P}$ کمتر است. این متناقض با انتخاب $\mathscr{P}$ است.

فصل ۵

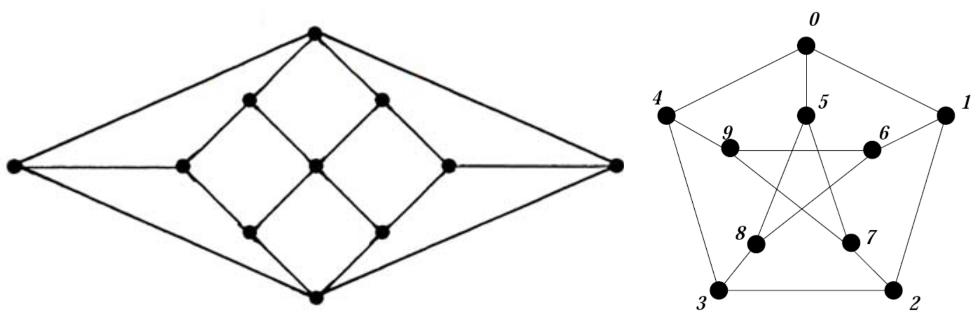
مجموعه‌های مستقل و جورسازی‌ها

<u>تمرین ۱.۲</u> مقادیر پارامترهای α، α'، β، و β' را برای گراف‌های زیر تعیین کنید.

(۱) K_n.

(۲) گراف پترسن.

(۳) گراف هرشل (شکل ۴.۵ را ببینید).



شکل ۴.۵. گراف پترسن   گراف هرشل

<u>حل</u> داریم $\alpha(K_n) = 1$ و $\beta(K_n) = n - 1$. هم‌چنین

$$\beta'(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ فرد} \end{cases} \quad \text{و} \quad \alpha'(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

(۲) فرض کنید P گراف پترسن باشد. یک مجموعه‌ی مستقل راسی ماکسیمم از P عبارت از $\{۰, ۲, ۶, ۸\}$، بنابراین $\alpha(P) = ۴$. پس $\beta(P) = ۱۵ - \alpha(P) = ۱۱$. همچنین یک جورسازی کامل ماکسیمم از P عبارت است از $\{\{۰, ۵\}, \{۱, ۶\}, \{۲, ۷\}, \{۳, ۸\}, \{۴, ۹\}\}$، پس $\alpha'(P) = ۵$، و در نتیجه $\beta'(P) = ۱۵ - \alpha'(P) = ۱۰$.

(۳) برای گراف هرشل داریم $\alpha = \beta' = ۶$.

تمرین ۲.۲ به ازای هر گراف G با $\delta > ۰$، ثابت کنید که $\alpha \leq \beta'$ و $\alpha' \geq \beta$.

حل این مطالب نتیجه‌ای از گزاره‌های کلی‌تری زیر است:

(۱) نشان می‌دهیم که یک پوشش یالی می‌نیمال، پوشش یالی می‌نیمم است اگر و تنها اگر شامل یک جورسازی ماکسیمم باشد.

فرض کنید L یک پوشش یالی می‌نیمم باشد. چون L می‌نیمال است پس شامل مجموعه‌ای از ستاره‌ها است. چون $|L| = \beta'(G) = n - \alpha'(G)$، پس تعداد ستاره‌ها دقیقاً برابر $\alpha'(G)$ است. این یعنی جورسازی به دست آمده از یک یال از هر ستاره دارای اندازه‌ی $\alpha'(G)$ است، یعنی جورسازی ماکسیمم است.

برعکس فرض کنید L یک پوشش یالی می‌نیمال باشد و شامل یک جورسازی ماکسیمم باشد. این حقیقت که L می‌نیمال است نتیجه می‌دهد که L مجموعه‌ای از ستاره‌ها است. بنابراین L دارای دقیقاً $\alpha'(G)$ ستاره است، یعنی $|L| = n - \alpha'(G) = \beta'(G)$ پس L پوشش یالی می‌نیمم است.

(۲) اکنون نشان می‌دهیم که یک جورسازی ماکسیمال، جورسازی ماکسیمم است اگر و تنها اگر شامل یک پوشش یالی می‌نیمم باشد.

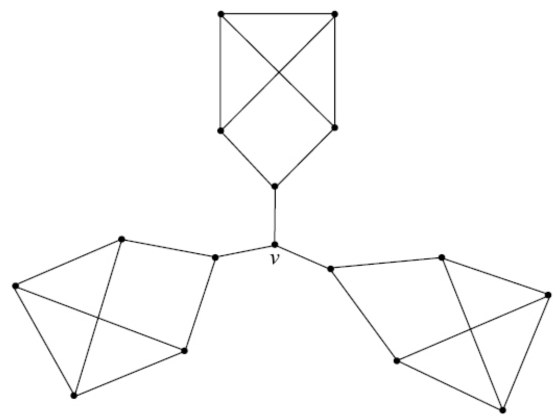
فرض کنید M یک جورسازی ماکسیمم باشد. فرض کنید L پوشش یالی به دست آمده با در نظر گیری یک یال دلخواه مجاور به ازای هر راس $V(G) - M$ به همراه M باشد. به وضوح $|L| = \alpha'(G) + n - ۲\alpha'(G) = \beta'(G)$ از این‌رو L پوشش یالی می‌نیمم شامل M است.

برعکس فرض کنید M یک جورسازی ماکسیمال دلخواه باشد که توسط پوشش یالی

می‌نیمم L حاصل شده است. یال‌های M باید از ستاره‌های مختلف L بیایند. علاوه بر آن ماکسیمال بودن M نتیجه می‌دهد که هر ستاره ی L حداقل یک در یال از M مشارکت می‌کند، پس $|M| = n - \beta'(G) = \alpha'(G)$.

تمرین ۱.۳ مثالی از یک گراف مکعبی بزنید که ۱-عامل نداشته باشد.

حل شکل زیر را ببینید



تمرین ۲.۳ نشان دهید که $K_{n,n}$ و K_{2n} گراف‌های ۱-تجزیه‌پذیر هستند.

حل راس‌های گراف K_{2n} را با ۱، ۲، . . .، $2n$ نشان می‌دهیم. یک چندضلعی منتظم با $2n - 1$ راس و برچسب راس‌های ۲، ۳، . . .، $2n$ در جهت عقربه‌های ساعت می‌سازیم. فرض کنید فاصله‌ی بین دو راس متوالی در دور برابر یک واحد باشد. مرکز چندضلعی را متناظر راس ۱ در نظر می‌گیریم. یک ۱-عامل M_1 شامل یال بین ۱ و ۲ همرا با $n - 1$ یال دیگر را به صورت زیر می‌سازیم. تعداد $n - 1$ راس هستند که از ۲ در جهت عقربه‌های ساعت شروع می‌شوند و تعداد $n - 1$ راس هستند که از ۲ در جهت عکس عقربه‌های ساعت شروع می‌شوند. به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، راس قرار گرفته در i واحد از راس ۲ در جهت عقربه‌های ساعت و راس قرار گرفته در i واحد از راس ۲ در جهت عکس عقربه‌های ساعت را به هم وصل می‌کنیم. با این روش $n - 1$ یال به دست می‌آید. این $n - 1$ یال به همراه یال متصل کننده‌ی راس مرکزی ۱ و راس ۲ یک ۱-عامل به دست می‌دهد.

سپس راس‌ها با فاصله‌های مساوی (در هر دو جهت) را از راس ۳ در نظر می‌گیریم. این کار منجر به $n-۱$ یال می‌شود که به همراه یال متصل کننده‌ی راس مرکزی ۱ و راس ۳ یک ۱-عامل به دست می‌دهد. این روند را ادامه می‌دهیم. آخرین ۱-عامل با استفاده از وصل راس‌ها با فاصله‌های مساوی (در هر دو جهت) را از راس $۲n$ به همراه یال متصل کننده‌ی راس مرکزی ۱ و راس $۲n$ است. این فرایند $۲n-۱$ جورسازی کامل را به دست می‌دهد. چون هر ۱-عامل دارای n یال است، پس تعداد کل یال‌های این $۲n-۱$ جورسازی برابر $n(۲n-۱)$ است، و این عدد همان تعداد یال‌های گراف کامل $K_{۲n}$ است. از این‌رو $K_{۲n}$ گراف ۱-تجزیه پذیر است.

اکنون حکم دیگر را ثابت می‌کنیم. چون $K_{n,n}$ یک گراف n-منتظم دوبخشی است، پس طبق قضیه‌ی ۵.۴.۳، یک گراف ۱-تجزیه‌پذیر است. به روش دیگری نشان می‌دهیم که هر گراف k-منتظم دوبخشی ۱-تجزیه‌پذیر است. اثبات را به استقرا روی k انجام می‌دهیم. اگر $k=۱$، آن‌گاه نتیجه واضح است. فرض کنید حکم برای $k-۱$ درست باشد، که در آن $k\geq ۲$. فرض کنید G یک گراف k-منتظم دوبخشی باشد. طبق قضیه‌ی هال ۱-عامل F از G وجود دارد. گراف $G'=G-F$ یک گراف دوبخشی منتظم با درجه‌ی $n-۱$ است. بنابراین طبق فرض استقرا G' گراف ۱-تجزیه‌پذیر است. هر ۱-تجزیه از G' به همراه ۱-عمل F یک ۱-تجزیه از G را به دست می‌دهد.

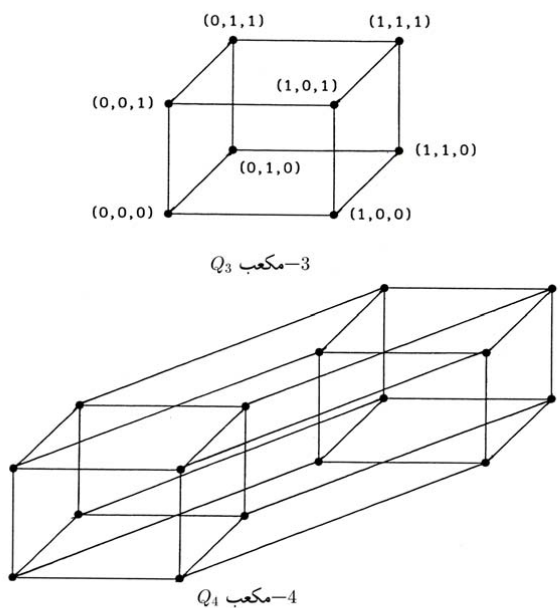
تمرین **۳.۳** نشان دهید که تعداد ۱-عامل‌های گراف
(۱) $K_{n,n}$ برابر است با $n!$،
(۲) $K_{۲n}$ برابر است با $\frac{(۲n)!}{۲^n n!}$.

حل (۱) گراف $K_{n,n}$ را مجموعه‌ها بخشی $X=\{x_۱,\dots,x_n\}$ و $Y=\{y_۱,\dots,y_n\}$ را در نظر بگیرید. یک جورسازی کامل از $K_{n,n}$ دقیقاً یک تابع دوسویی از X به Y را تعیین می‌کند. برای جورکردن $x_۱$ با عضوی از Y تعداد n انتخاب داریم. برای جفت $x_۲$ تعداد $n-۱$ انتخاب از Y داریم، .... بنابراین $n!$ جورسازی کامل وجود دارد.
(۲) فرض کنید f_n تعداد راه‌هایی باشد که $۲n$ راس در $K_{۲n}$ را بتوان جور کرد. تعداد $۲n-۱$ انتخاب برای شریک راس $۲n-۱$، و به ازای هر کدام از این انتخاب‌ها

تعداد f_{n-1} راه برای کامل کردن جورسازی وجود دارد. بنابراین $f_n = (2n-1)f_{n-1}$، $n \geq 1$. چون $f_0 = 1$، به استقرا می‌توان دید که $f_n = (2n-1)(2n-3)\cdots 1$. توجه کنید که داریم

$$\begin{aligned} f_n &= (2n-1)(2n-3)\cdots 1 \\ &= [(2n-1)(2n-3)\cdots 1] \times \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n)(2n-2)\cdots 2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n)(n-1)\cdots 1} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

تمرین ۳.۴ n-مکعب Q_n گرافی است که راس‌های آن n-تایی‌های متشکل از صفر و یک هستند. دو راس Q_n مجاور هستند اگر و تنها اگر فقط در یک مولفه با هم اختلاف داشته باشند. نشان دهید که Q_n $(n \geq 2)$ دارای یک جورسازی کامل است. (۳-مکعب Q_3 و ۴-مکعب Q_4 در شکل ۷.۵ نشان داده شده‌اند.)

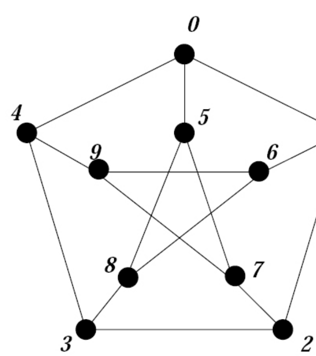


شکل ۷.۵. گراف ۳-مکعب (Q_3) و ۴-مکعب (Q_4)

حل به ازای هر $(n-۱)$-تایی $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱})$، که در آن $x_i \in \{۰, ۱\}$، یال بین راس‌های $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, ۰)$ و $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, ۱)$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح هیچ دو یالی با هم مجاور نیستند، زیرا $(n-۱)$-تایی‌های $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱})$ همگی متمایز هستند.

تمرین ۳.۵ نشان دهید که گراف پترسن ۱-تجزیه‌پذیر نیست. (راهنمایی: به نوع‌های مختلف ۱-عامل‌های گراف نگاه کنید.)

حل گراف پترسن دارای ۶ جورسازی کامل است، که در زیر مشخص شده‌اند. چون گراف پترسن اجتماع مجزا-یال تعدادی از این جورسازی‌ها نیست، پس ۱-تجزیه‌پذیر نیست.



$$M_۱: \quad (۰,۵), (۶,۸), (۷,۹), (۱,۲), (۳,۴)$$
$$M_۲: \quad (۱,۶), (۵,۸), (۷,۹), (۲,۳), (۰,۴)$$
$$M_۳: \quad (۲,۷), (۵,۸), (۶,۹), (۳,۴), (۰,۱)$$
$$M_۴: \quad (۳,۸), (۵,۷), (۶,۹), (۰,۴), (۱,۲)$$
$$M_۵: \quad (۴,۹), (۶,۸), (۵,۷), (۰,۱), (۲,۳)$$
$$M_۶: \quad (۰,۵), (۱,۶), (۲,۷), (۳,۸), (۴,۹)$$

راه دیگر: راس‌های ۰، ۱، ۲، ۳، و ۴ را راس‌های خارجی و راس‌های دیگر را راس‌های داخلی نامگذاری می‌کنیم. اگر گراف پترسن ۱-تجزیه‌پذیر نباشد، آن‌گاه (چون دارای ۱۵

راس است) دارای سه تا جورسازی کامل است که هر کدام پنج یال دارند. بنابراین اگر هر مجموعه‌ی F متشکل از پنج عضو گراف به تصادف انتخاب شوند، آن‌گاه حداقل یکی از آن‌ها باید جورسازی کامل باشد که شامل حداقل دو یال از F است. فرض کنید F مجموعه‌ی پنج یالی باشد که یک راس خارجی را راس یکتای مجار آن وصل می‌کند. فرض کنید H، جورسازی کامل باشد که شامل یال e واصل بین دو راس ۰ و ۵ و یال f واصل بین دو راس ۱ و ۶ باشد. اما اگر این چهار راس را از گراف پترسن حذف کنیم، شش راس باقی‌مانده نمی‌توانند در سه زوج جور شوند.

تمرین **۳.۶** نشان دهید که هر درخت حداکثر یک جورسازی کامل دارد.

حل فرض کنید T یک درخت با دو جورسازی M_1 و M_2 باشد. تفاضل متقارن $F = M_1 \Delta M_2 = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)$ در G را در نظر می‌گیریم. اگر $M_1 \neq M_2$، آن‌گاه یال‌های F اجتماعی از دورهای به طول زوج در T تشکیل می‌دهند. چون T دارای دور نیست پس $M_1 = M_2$.

تمرین ***۳.۷** نشان دهید که اگر یک گراف ۲-یال همبند دارای یک ۱-عامل باشد، آن‌گاه دارای حداقل دو ۱-عامل است.

حل اثبات را به استقرا روی تعداد یال‌های G انجام می‌دهیم. اگر G دارای ۴ یال باشد، آن‌گاه حکم به وضوح برقرار است. فرض کنید که جکم برای همه‌ی گراف‌های با کمتر از k یال درست باشد و G را یک گراف ۲-همبند با k یال و یک ۱-عامل F باشد. اگر G دارای یک یال e باشد که درجه‌ی هر پایان آن برابر ۲ باشد، آن‌گاه می‌توان فرض استقرا را برای $G - e$ به کاربرد.

پس فرض کنید درجه‌ی پایان‌های هر یال از G حداقل ۳ باشد. از این‌رو یک یال $e = v_1v_2$ از $G - F$ وجود دارد که پایان‌های آن از درجه ی حداقل ۳ هستند. فرض کنید $G' = G - E$.

اگر G' گراف ۲-همبند باشد، آن‌گاه چون F یک ۱-عامل از G' است (همچنانکه ۱-عامل از G است) از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که G' دارای حداقل دو تا ۱-عامل است، که ۱-عامل‌هلی G نیز هستند.

اگر G' گراف ۲-همبند نباشد، آنگاه یک راس برشی v از G' وجود دارد و $G'-v$ دقیقاً دارای دو مولفه مانند G_1 و G_2 است، که در آن $v_1 \in V(G_1)$ و $v_2 \in V(G_2)$، زیرا G گراف ۲-همبند است.
اگر F شامل یال v_1v باشد، آنگاه $G_1 = G - G_2$ یک گراف ۲-همبند و دارای ۱-عامل است؛ پس طبق فرض استقرا دارای ۱-عامل دیگری است. که اگر آن‌را به همراه $F \cap G_2$ در نظر بگیریم ۱-عامل جدیدی از G خواهیم داشت. به طریق مشابه اگر F شامل یال v_2v باشد، آنگاه ۱-عامل جدیدی از G به دست می‌آوریم.
اکنو فرض کنید هیچ‌کدام از دو حالت بالا برقرار نباشند. بدون کم شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که F شامل یک یال است که یک پایان آن v و پایان دیگر آن در G_1 است. فرض کنید H_1 گراف به دست آمده از $G_1 = G - G_2$ با افزودن یال v_1v (اگر از پیش چنین یالی در آن نباشد) باشد؛ و فرض کنید H_2 گراف به دست آمده از $G_2 = G - G_1$ با افزودن یال‌های v_1v_2 و v_1v باشد. به وضوح H_1 و H_2 گراف‌های ۲-همبند هستند، و $F_1 = H_1 \cap F$ یک ۱-عامل از H_1 است، در حالیکه $F_2 = \{v_1v\} \cup (H_2 \cap F)$ یک ۱-عامل از H_2 است. از این‌رو طبق فرض استقرا ۱-عامل‌های F_i' از H_i، $i = ۱, ۲$، وجود دارند.
اگر F_1' شامل یال v_1v نباشد، آنگاه $(H_2 \cap F) \cup F_1'$ یک ۱-عامل از G متمایز از F است. اگر اگر F_1' شامل یال v_1v باشد، آنگاه $(F_2' - \{v_1v\}) \cup F_1'$ یک ۱-عامل از G متمایز از F است. اگر هیچ‌کدام از دو حالت بالا رخ ندهد، آنگاه $(F_1' \cup F_2') - \{v_1v\}$ یک ۱-عامل از G و متمایز از F است.
پس حکم ثابت است.

تمرین ۴.۴ نشان دهید که Q_n، $n \geq ۲$، ۱- تجزیه‌پذیر است.

حل n-مکعب Q_n یک گراف n-منتظم دوبخشی است. بنابراین طبق اثبات قضیه‌ی ۵.۴.۳، ۱-تجزیه‌پذیر است.
یک اثبات استقرایی به صورت زیر است. Q_k به صورت حاصل‌ضرب دکارتی $Q_{k-1} \times K_2$ تعریف می‌شود و دارای 2^k راس است (در واقع Q_k شامل دو زیرگراف

یکریخت با Q_{k-1} است و راس‌های متناظر توسط یک یال به هم متصل هستند). راس‌ها K_2 را با ۰ و ۱ نشان می‌دهیم. به ازای هر راس u از Q_{k-1}، زوج‌های مرتب $(u,0)$ و $(u,1)$ دو راس مجاور در Q_k هستند زیرا ۰ و ۱ در K_2 مجاورند. طبق تعریف زوج‌های مرتب (u,i) و (c,i) مجاور هستند اگر و نتها اگر u و v در Q_{k-1} مجاور باشند، که در آن $i = 0, 1$. فرض کنید $e = uv$ در یک جورسازی کامل M (با 2^{k-1} یال) از Q_{k-1} قرار داشته باشد. متناظر e دو یال جور شده در Q_k وجود دارد: یال e_1 که راس‌های $(u,0)$ و $(v,0)$ را وصل می‌کند و یال e_2 که راس‌های $(u,1)$ و $(v,1)$ را وصل می‌کند. از این‌رو هر یال جور شده در Q_{k-1} متناظر دو یال در Q_k است که راس مشترکی ندارند. بنابراین به ازای هر جورسازی کامل از Q_{k-1} یک جورسازی کامل از Q_k به دست می‌آوریم. اگر به ازای هر راس v از Q_{k-1} یال متصل بین دو راس $(v,0)$ و $(v,1)$ را به عنوان یال جور شده در نظر بگیریم، آن‌گاه یک جورسازی کامل بیش از Q_k خواهیم داشت.

تمرین ۶.۴ نشان دهید که یک گراف k-منتظم $(k-1)$-یال همبند با مرتبه‌ی زوج دارای ۱-عامل است. (این نتیجه از بابلر نتیجه‌ی پترسن را تعمیم می‌دهد (نتیجه‌ی ۱۱.۴.۵) و می‌توان آن‌را با تقلید از اثبات آن نشان داد.)

حل فرض کنید که G یک گراف k-منتظم $(k-1)$-یال همبند با مرتبه‌ی زوج و S یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از V باشد. فرض کنید O_1، O_2، $\ldots$، O_r مولفه‌های فرد G_S باشند. فرض کنید مرتبه‌ی O_i برابر n_i و اندازه‌ی آن برابر m_i باشد و k_i یال O_i را به S وصل کند. در این صورت $k_i \geq k-1$ و

$$\sum_{v\in V(O_i)} d(v) = kn_i = 2m_i + k_i \quad (*)$$

و

$$\sum_{v\in S} d(v) = k|S| \geq \sum_{i=1}^{r} k_i + 2|E(S)|. \quad (**)$$

اکنون $(*)$ نتیجه می‌دهد که $k_i = kn_i - 2m_i$. بنابراین اگر k زوج باشد، آن‌گاه k_i نیز زوج است؛ و در نتیجه $k_i > k-1$ نتیجه می‌دهد که $k_i \geq k$. به طریق مشابه اگر k فرد باشد، آن‌گاه k_i نیز فرد است و مجدداً $k_i > k-1$ نتیجه می‌دهد که $k_i \geq k$. با

جمع کردن اینها بر روی r مولفه‌ی فرد و با استفاده از $(**)$ خواهیم داشت

$$rk \leq \sum i = \text{۱}^r k_i \leq \sum_{i=\text{۱}}^{r} k_i + \text{۲}|E(S)| \leq k|S|.$$

بنابراین $O(G-S) = r \leq |S|$ و طبق قضیه‌ی توته، G دارای ۱-عامل است.

تمرین ۷.۴ اگر G گراف k-همبند با مرتبه‌ی زوج که $K_{\text{۱},k+\text{۱}}$ را به عنوان زیرگراف القایی نداشته باشد، آنگاه نشان دهید G دارای ۱-عامل است.

حل فرض کنید G دارای ۱-عامل نباشد. در این صورت G دارای یک پادعامل می‌نیمم مانند S است. فرض کنید $s = |S|$ و کنید $O_\text{۱}$، $O_\text{۲}$، $\ldots$، O_r مولفه‌های فرد $G-S$ باشند. قرار می‌دهیم

$$S'_i = \{v \in S \mid \text{با یک راس از } O_i \text{ مجاور باشد } v\}.$$

در این صورت S'_i یک برش راسی از است و در نتیجه $|S'_i| \geq k$. از این‌رو حداقل k یال از O_i وجود دارند که با k راس متمایز از S مجاور هستند. تعداد چنین یال‌هایی، وقتی i از ۱ تا r تغییر می‌کند حداقل برابر rk است و این مقدار، طبق مشاهده‌ی ۵.۴.۱۳، بزرگتر یا مساوی $k(s+\text{۲})$ است. از این‌رو حداقل یک راس v از S وجود دارد که با حداقل $k+\text{۱}$ یال از این یال‌ها مجاور است. اما در این صورت v مرکز یک زیرگراف القایی به صورت $K_{\text{۱},k+\text{۱}}$ است، و این یک تناقض است.

تمرین ۸.۴ نشان دهید که اگر G گراف همبند با مرتبه‌ی زوج باشد، آنگاه $G^\text{۲}$ دارای ۱-عامل است.

حل نشان می‌دهیم $G^\text{۲}$ پنجه آزاد است، یعنی زیرگراف یکریخت با $K_{\text{۱},\text{۳}}$ ندارد. پس از این‌کار از قضیه‌ی ۵.۴.۱۶ نتیجه می‌شود که $G^\text{۲}$ دارای ۱-عامل است. اما این مطلب واضح است زیرا طبق تمرین ۷.۵ از صفحه‌ی ۳۴ هر یال از $G^\text{۲}$ به یک مثلث تعلق دارد.

از راه مستقیم نیز می‌توان مساله را حل کرد: به استقرا روی تعداد راس‌های G حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $n = \text{۲}$، حکم برقرار است. اکنون فرض کنید حکم برای گراف‌های با مرتبه‌ی زوج کمتر از مرتبه‌ی G برقرار باشد. چون G همبند است طبق یکی از تمرین‌ها دو راس مجاور x و y وجود دارند که $H = G - \{x, y\}$ همبند است.

بنابراین ۲ $\leq d(x,y)$ و x و y در $G^۲$ مجاور هستند. چون H گراف همبند با مرتبه‌ی زوج است، پس طبق فرض استقرا $G^۲$ دارای ۱−عامل است، که به همراه یال $xy \in G^۲$ به یک ۱−عامل از $G^۲$ خواهیم رسید.