جزوه نظریه گراف

استاد : سرکار خانم ندا بهشتی

تهیه و تنظیم : سرکار خانم گل محمدی

«به نام خدا»

ج ۱

نظریه گراف - فصل ۱

Subject:

Date.

استاد دبهشتی اصل

تعریف گراف = سه تایی مرتب $G = (V(G), E(G), I(G))$ که در آن $\underbrace{V(G)}_{\text{مجموعه رئوس}} \neq \emptyset$ ، $E(G)$ ، مجموعه یالها و $I(G)$ تابع نگاشت وقوع می باشد.

مثال) گرافی داریم که :

$G = (V(G), E(G), \quad)$

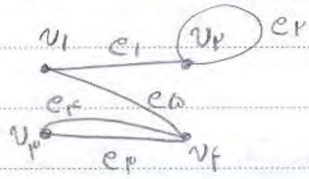
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$I(e_1) = v_1 v_2$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$I(e_2) = v_2 v_2$

$I(e_3) = v_3 v_4$ $\quad I(e_4) = v_4 v_3$ $\quad I(e_5) = v_1 v_4$



تعریف: اگر $e_1 = uv$ باشد ، رئوس u و v را رئوس یا پایانی یال e گوییم

رئوس مجاور = رئوسی که حداقل از طریق ۱ یال بهم وصل شده باشند.

یال مجاور = دو یال e_1 و e_2 را مجاور گویند اگر حداقل در یک رأس پایانی مشترک باشند.

طوقه = یالی است که رئوس پایانی آن یکسان باشد. «یالی که تنها یک رأس دارد»

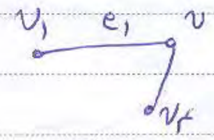
یال موازی (چندگانه) = دو یال e_1 و e_2 را موازی گویند هرگاه رئوس پایانی هر دو یکسان باشد.

گراف ساده = گرافی فاقد طوقه و یال موازی

$e - e_2$ ⟸ فقط یال e_2 از G حذف شود.

$G - v_3$ ⟸ هم رأس و هم تمامی یالهای آن حذف گ

$G + v_2 v_4$



PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

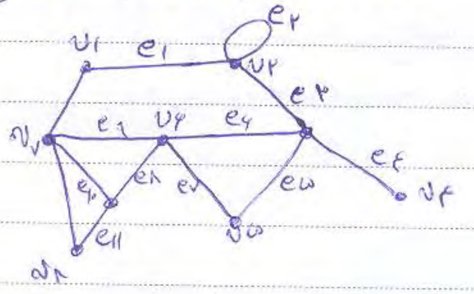
Subject.
Date.

همسایگی باز = رأس v ، $N(v)$ نشان می‌دهیم برابر است با تمامی رئوس مجاور .

همسایگی بسته = رأس v برابر است با $N[v]=N(v)\cup\{v\}$

تعداد رئوس = $n = |V| =$ کاردینالیتی = $card(V)$

تعداد یالها = $m = |E| = card(E)$



$n = 8$

$m = 11$

درجه رئوس = تعداد یالهای مار و رأس را درجه آن رئوس گویند و با $d(v_i)$ نشان می‌دهد

تعداد یالهایی که از رأس می‌گذرد .

$d(v_6) = 4$

$d(v_9) = 0$

رأس آویخته = رأسی که درجه آن یک باشد مثل v_4 در گراف بالا

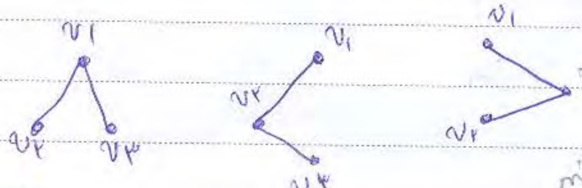
رأس منزوی (تنها) = رأسی که درجه آن صفر باشد ، فقط یه رأس است یالی ندارد .

گراف بدیهی = گرافی که $n=1$ و $m=0$

گراف برچسب دار = گرافی که روی یالهایش مثل گراف بالا وزن داشته باشد ،

= تمامی رئوس و یالهای آن نام گذاری شده باشد .

نکته) در شمارش درجه رأس ، طوقه ۲ بار حساب می‌شود . $d(v_2) = 4$



مثال) برای گرافی با ۳ رأس و ۲ یال ، ما بیشتر از ۳ بار /

نمی‌توانیم آن را برچسب دار کنیم

نکته) ما گراف مشابه داریم

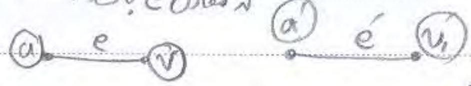
هر دو گراف تعداد رأس‌ها و یال‌هایشان برابر باشد و از لحاظ درجه رئوس یکسان باشد.
در رأسی که طوقه دارد باید به رأسی برود که طوقه دارد

Subject.
Date.

تعریف گراف یکریختی: گراف G و H را یکریخت گویند $G \cong H$ اگر زوج (φ, θ) موجود باشد که در آن $\varphi : V(G) \to V(H)$ ، $\theta(G) \to E(H)$ دو به دو یی باشد و داشته باشیم:

$$I_G(e) = [u, v] \Longleftrightarrow I_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$$

یک یال در G است، متناظر e پیدا کنیم که معادل e باشد.



مثال) کدام جفت گراف زیر یکریخت نیستند؟

به ۲ رأس وصل است که به
دو رأس موازی وصل نیست

گراف کامل: K_n را گراف کامل گویند اگر از هر رأس به تمامی رئوس دیگر یال موجود داشته باشد.
تعداد رأس

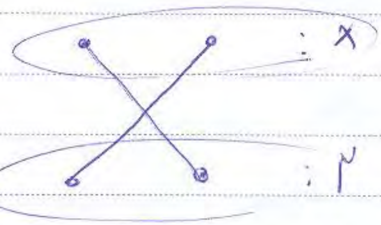
$m = \frac{n(n-1)}{2}$ همه حالات ضرب ۲ عدد متوالی زوج
تعداد یال در گراف کامل

گراف دوبخشی: گراف G را دوبخشی گویند هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به دو مجموعه X و Y افراز کرد به طوری که هر یال G یک انتهای آن در X و انتهای دیگر در Y باشد.

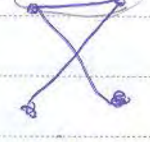
$V(G) = X \cup Y$

$e = uv \Rightarrow u \in X$ و $v \in Y$

مثال) ۲ یال مجاور نباید با هم رابطه داشته باشند.



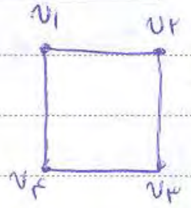
دوبخشی است



دوبخشی X

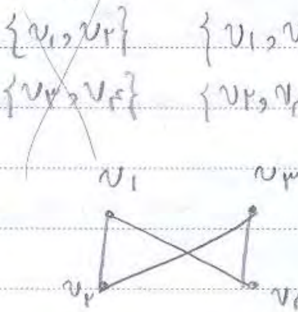
بنابراین مجاور باشند

مثال)



$X: \{v_1, v_2\}$ $\{v_1, v_3\}$

$Y: \{v_3, v_4\}$ $\{v_2, v_4\}$



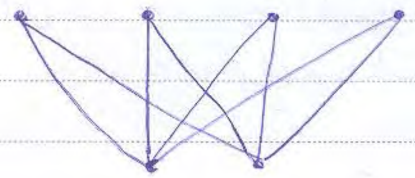
باهم یکریخت هستند

دوبخشی کامل است چون: از هر بخش در یک افراز، در افراز بخش های دیگر هم وجود دارد.

یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر یک دور فرد نداشته باشد.

تعریف: گراف دوبخشی کامل گرافی است که از هر رأس در یک افراز مثل X به تمامی رئوس دیگر در افراز Y یال وجود داشته باشد.

مثال)



تعداد یالها

$K_{4,2} = 4 \times 2 = 8$

$K_{nm} = nm$ تعداد یالها

Cardinality $\Leftarrow \begin{cases} |X| = m \\ |Y| = n \end{cases}$

ستاره $K_{1,3}$

تعریف گراف مکمل:

گراف G^c را مکمل گراف G گویند هرگاه تمامی رئوس ... دارا باشد و اگر دو رأس در G مجاور نباشد در G^c مجاور شود و برعکس

مثال

G

G^c

گراف خودمکمل: گرافی است که G و G^c باهم یکریخت باشند.

Subject.

Date.

مثال) فرض کنید G یک گراف ساده باشد با n رأس ، اگر G دارای ۵۶ یال باشد و G^c دارای ۸۰ یال باشد، n چند است؟

(۱۹) (۱۵) (۱۳) (۱۷)

نکته: اگر $|V|=n$ باشد

$|E(G)|+|E(G^c)|=\frac{n(n-1)}{2}=$ تعداد یالها

$G \cup G^c = K_n$ گراف کامل

تعداد یال

$G_c=56$

$G=80$

$56+80=136=\frac{n(n-1)}{2}$

$272=n^2-n$

$an^2+bn-272=0$

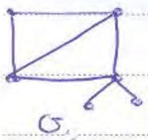
$n_1, n_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

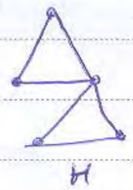
$\Delta=b^2-4ac$

گراف H را زیرگراف G گویند هرگاه :

$V(H)\subseteq V(G)$ و

$E(H)\subseteq E(G)$ باشد.


G


H

$f:\overbrace{\{1,2,3,4,5\}}^{A}\longrightarrow\overbrace{\{a,b,c,d,e,g\}}^{B}$

$f(1)=a$

$f(2)=b$

$f(3)=c$

$f(4)=d$

$f(5)=e$

$H\subseteq A$ $\quad H=\{1,2,3\}$

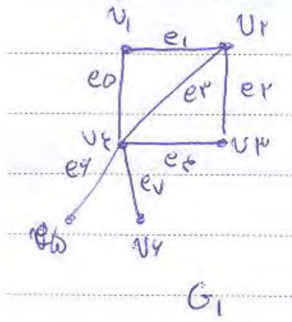
$f_H=\{1,2,3\}$

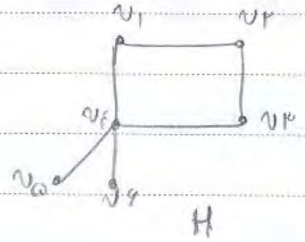
f تحدید H

زیرگراف : بخشی از رئوس و یالهای گراف اصلی

Subject.
Date.

زیرگراف القایی: زیرگراف H را از G یک زیرگراف القایی گویند هرگاه هر یال که پایانه‌هایش در $V(H)$ باشد، یک یال در H نیز باشد.





یک زیرگراف القایی است

هر یالی در G است که رئوس انتهایش در H باشد که خود یال هم در H است.

$V(H) \subseteq V(G) \quad E(H) \subseteq E(G)$

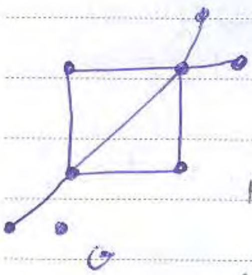
شرط

ج ۲:

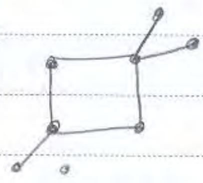
زیرگراف فراگیر: زیرگراف H را از G فراگیر گویند که مجموعه رئوس H و G برابر باشد.

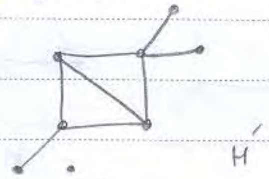
$V(G) = V(H)$

(فقط رئوس مهم است)
همه رأس‌ها را داشته باشد ولی همه یال‌های آن را ندارد



$H \subseteq G$





فراگیر است.
فقط باید همه رئوس را داشته باشد.
و یال‌های زیرگراف فراگیر (H) باید براساس گراف اصلی باشد.
یال‌های H زیرمجموعه یال‌های G باشد.

فراگیر نیست، چون اصلاً زیرگراف نیست. چون یال‌هایی که باید G داشته باشد درون H' نیست.

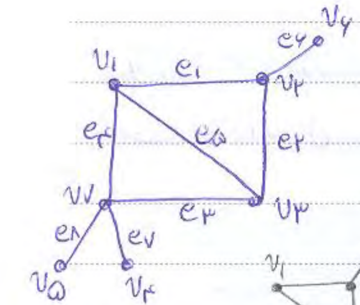
تذکر: اگر در امتحان رئوس را نام‌گذاری کرده باشند و جابجا گذارند، قبول است.

PAPCO

Subject.

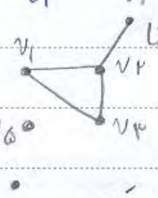
Date.

فرض کنید G یک گراف باشد و $S \subseteq V(G)$، آنگاه زیرگراف القاشده توسط S برابر است با زیرگرافی از G که رئوس آن S و یالهای آن یالهایی از G هستند که دو سر آنها در S باشد. گراف القاشده توسط زیرمجموعه رئوس S را با $G[S]$ نشان می‌دهند.



مثال) گراف القاشده توسط مجموعه S را رسم کنید.

$S = \{v_1, v_5, v_3, v_2, v_6\}$



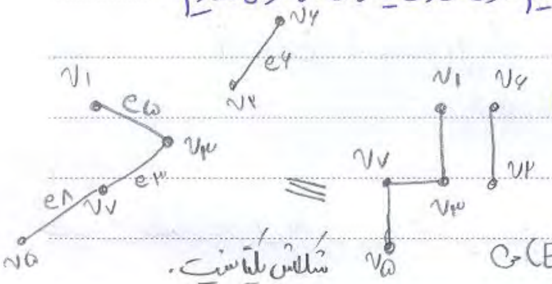
اول همه رئوسی را که توی S است را می‌ذاریم و حالا یالهای بین آنها را (آنهایی که در گراف اصلی بود) توی $G[S]$ می‌گذاریم

$G[S]$

یال القایی (القاشده توسط یال) $G[E']$ ، $E' \subseteq E(G)$

به جای اینکه اول همه رئوس S را بگذاریم اول همه‌ی یالهای آنها را می‌گذاریم.

مثال) $E' = \{e_8, e_5, e_6, e_3\}$

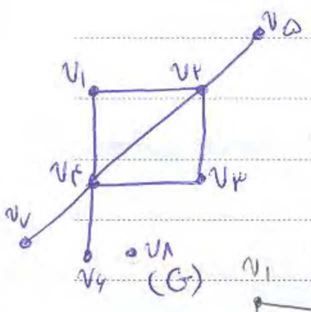


جای رئوس مهم نیست.

شکلش یکتا نیست.

$G(E')$

خوشه: یک زیرگراف کامل از G را یک خوشه می‌گویند.

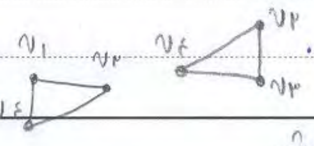


(G)

* هر یال، می‌تواند به تنهایی یک خوشه باشد.

* رئوس تک هم خوشه هستند. $\circ\ v_8$

* هرکدام تک تک هم کامل هستند هم خوشه.

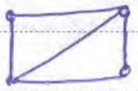


گراف ساده را گراف کامل است که تمام یالهای بین رئوس را داشته باشد.

PAPCO

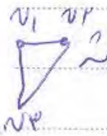
http://www.ab-rafiee.com

Subject.
Date.

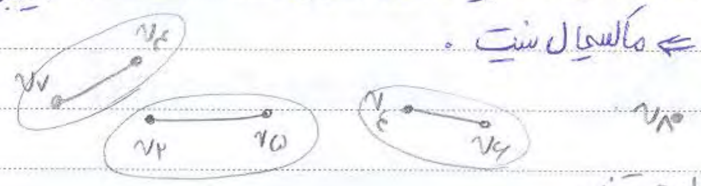


* خوشه نیست چون کامل نیست .

خوشه ماکسیمال : که زیرمجموعه ای هیچ خوشه ای دیگر نباشد . (هیچ بخشی از خوشه دیگر نباشد)



مثلاً مثلث ۲ خوشه ماکسیمال هستند ، ولی مثلاً v_1 —— v_2 زیرمجموعه خوشه است ⇐ ماکسیمال نیست .



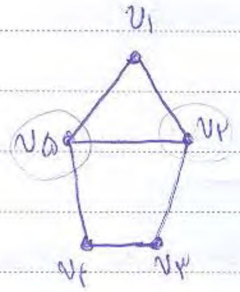
هر کدام ماکسیمال هستند .

گراف کامل : گراف ساده ای که از رأس آن تمام رئوس دیگر یال وجود داشته باشد و با K_n نشان می دهد ، * بدون طوقه و یال چندگانه

قضیه : $\sum_{u \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|$

قضیه اویلر ← مجموع درجه رأسهای یک گراف مساوی دو برابر تعداد یالهای آن است .

قضیه : تعداد رئوس با درجه فرد همیشه زوج هستند .



$d(v_1) = 2$

$d(v_2) = 3$

* مجموع تعداد زوج از اعداد فرد ، زوج است . *

۱۰۰٪ صورت تمرینها را حفظ کنیم امتحانی است

P4PCO

Subject.

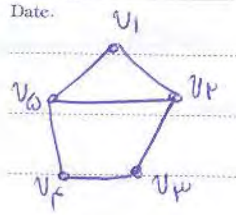
Date.

دنباله گرافیکی : ۱۰۰٪ امتحانی

دنبالهٔ درجه رئوس گراف .

فقط برای گراف‌های ساده تعریف می‌کنند .

به تعداد رأس‌ها ، درجه هر رأس را نشان می‌دهیم :



$d=(2,3,2,2,3)$

$d(d_1, d_2, \dots, d_n)$ از اعداد صحیح نامنفی را گرافیکی گویند هرگاه گراف ساده‌ای با درجه رئوس d وجود داشته باشد .

مثال) آیا دنباله گرافیکی است ؟ $d=(7,6,3,3,1,1,1)$

قوانین بررسی :

① مجموع کل رئوس اینها باید یک عدد زوج باشد . ✓ $7+6+3+3+1+1+1=24$

② تعداد رئوس فرد باید زوج باشد . ✓ ۶ تا

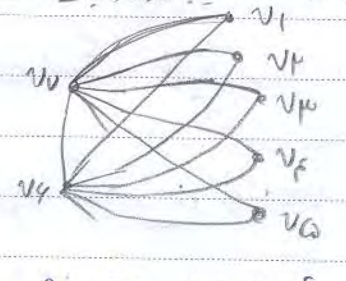
رئوسی که درجه شان فرد باشد .

③ حداکثر درجه می‌تواند $n-1$ باشد .

۷ تا رأس داریم $\Rightarrow$ $n=7 \rightarrow 7-1=6$ حداکثر درجه

حداکثر درجه باید ۶ باشد که در اینجا حداکثر درجه ۷ است $\Leftarrow$ گرافیکی ✗

④ از طریق شکل



۵ تا رأس داریم که حداقل از درجه ۲ هستند نه همه تا از درجه ۱

⑤ وقتی رأسی از درجه $n-1$ وجود داشته باشد ، رأس تنها نباید داشته باشد .

$d=(4,3,2,1,0)$

$n=5 \rightarrow n-1=4$

رأسی از درجه ۴ داریم پس نباید رأس تنها باشد

$\Rightarrow$ چون رأس تنها داریم $\Rightarrow$ گرافیکی ✗

PAPCO

Subject.
Date.

ص ۱۴۰، مثال ۹-۳-۱ (از طریق برهان خلف)

* n تعداد رئوس = تعداد نفر — فرض می کنیم هیچ دو نفری تعداد دوستانشان با هم برابر نباشد.

درجه هر رأس = تعداد دوستان

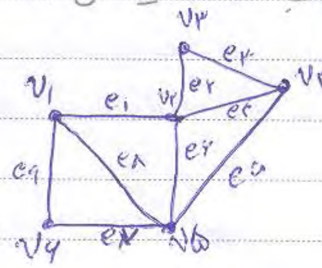
$d = (\underbrace{\quad\quad\quad}_{n \text{ تا}})$ دنباله گرافیکی

حداکثر $n-1$ تا می تونه باشد.

$n-1, n-2, \dots, 0$

هم باید یکی از اینها تا n تا تکمیل شه ⇐ شماره ۴ نقض شد

⇐ فرض خلف باطل



تعریف گشت:

یک دنباله متناوب از رئوس و یالها

که رأس و یال تکراری می تواند داشته باشد.

مثال) $v_1 e_8 v_5 e_6 v_2 e_6 v_5 e_7 v_6 e_9 v_1 e_1 v_2$

بسته = اگر از v_1 شروع کنیم به v_1 برسیم

گذر = گشتی است که یال تکراری ندارد ولی رأس تکراری می تونه داشته باشه

$v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_4 v_2$

مسیر = گشتی است که رأس تکراری ندارد ⇐ یال هم قطعاً تکرار نمی شه

هر مسیر یک گذر است: $v_6 e_7 v_5 e_5 v_4$

دور = مسیر بسته را گویند. $v_6 e_7 v_5 e_5 v_4 e_4 v_2 e_1 v_1 e_9 v_6$

Subject.
Date.

گراف همبند: بین هر دو رأس یک مسیر وجود داشته باشد.
که نه رأس تکراری و نه یال تکراری

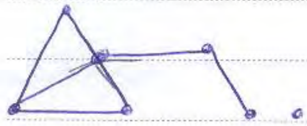
ص ۱۴ - تمرین ۱-۲-۳ مهم

ص ۱۶ گزاره ۶-۲-۱ (حتماً حفظ)   ص ۱۷ تمرین ۶-۲ مهم

ص ۱۷ قضیه ۸-۲-۱ خیلی مهم

تعریف دلتا δ (کوچک) = min درجه یک گراف

Δ (بزرگ) = max درجه یک گراف



$\min \quad \delta = 0$

$\max \quad \Delta = 4$

* گراف ساده‌ی G موجود است اگر Δ=۴ و δ=۲ باشد، آنگاه حداقل تعداد رأس‌های این گراف برابر خواهد بود؟

(۴) (۵) (۶) (نمی‌توان گفت)

نه رأس تکراری نه یال تکراری

* گراف همبند و ساده G دارای ۳۵ یال است. بیشترین مقداری که n می‌تواند داشته باشد چه قدر است؟

(۴۸) (۴۱) (۳۲) (۳۶)

۳۵ تا یال ← ۳۶ تا رأس می‌خواهد ولی چون باید همبند باشد یکی یال باید باشه تا درست شه

$n = m + 1$ تعداد رأس

۴ تا یال داشته باشد ← «باید با ۵ تا رأس کار کنیم»

* چند مسیر به طول ۴ در گراف K_7 وجود دارد؟

۴۱۰　　۷۱۰　　۱۲۶۰　　۲۵۲۰

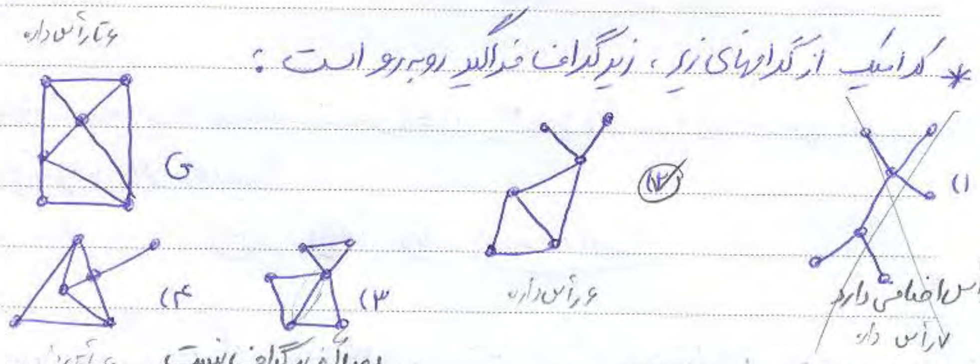
$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

* فرض کنید G یک گراف ساده باشد، اگر تعداد یالهایش $\binom{n}{2}$ باشد:

G دوبخشی است　　　G گراف هامیلتنی است

$\boxed{\text{G کامل است}}$　　　G درخت است.

* کدامیک از گرافهای زیر، زیرگراف فراگیر روبرو است:



* کدامیک از دنباله های زیر گرافیکی است؟

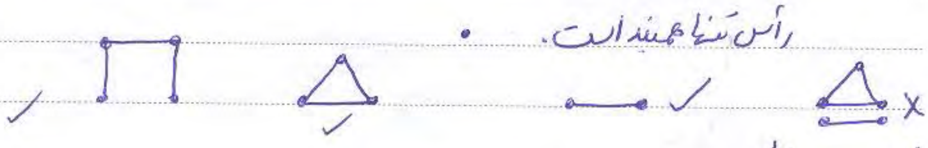
۱) (۶و۶و۶و۵و۴و۳و۳و۱)
۲) (۷و۶و۵و۴و۳و۳و۲)
۳) (۷و۵و۴و۲و۲و۱و۱و۱)
۴) (۲و۲و۲و۱و۱)

اگر ۷ رأس داشته باشیم و درجه ۷ هم داشته باشیم

باید درجه صفر داشته باشیم و درجه ۶ نداشته باشیم.

گراف همبند : G را همبند گویند اگر و تنها اگر بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

رأس تنها همبند است. •



$d(\ldots\ \infty)$

یعنی هر دو رأس تنها ⇐ همبند نیست

از ۳ زیرگراف همبند تشکیل شده است . $W=۳$

مؤلفه های همبندی = ماکسیمم زیرگرافهای همبند G را گویند . که با W نشان می دهند .

ص ۱۶ ، تمرینها ۶/۱-۴۶ مهم است ، صورت سوال حفظ شود .

ص ۱۷ - قضیه ۱-۴۸ (خیلی مهم است) ، قضیه ۱-۴۷

گراف خود ریختی : تابع های (I) شامل می شود .

هیچ وقت مجموعه گاما یا Γ ، تهی نیست . $\Gamma=\{I, \ldots\}\neq\emptyset$

توابع یک به یک و پوشایی هستند از $f: G \to G$

* ⇐ وارون پذیر هم هستند *

$$\Gamma(G)=\Gamma(G^c)$$

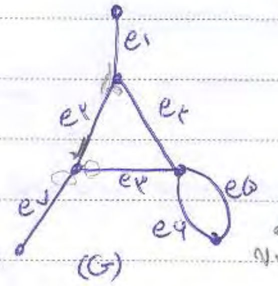
مثال ص ۲۱ - ۴-۵-۱ خوانده شود . جالبه

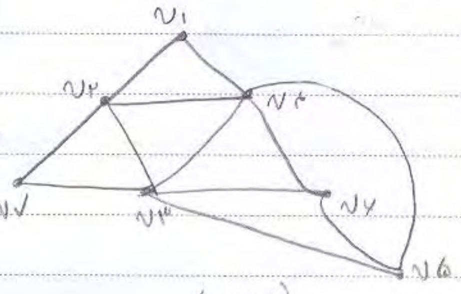
گرافهای یالی : فرض کنید G گراف بدون طوقه باشد . گراف یالی را که با $L(G)$ نشان می دهند به صورت زیر تعریف می شود :

Subject.
Date.

مجموعه رأس های L(G) در تناظر یک به یک با مجموعه یالهای G است و دو رأس در L(G) مجاور هستند اگر و تنها اگر یالهای متناظر در G با یکدیگر مجاور باشند.

به ازای هر یالی که تو G است ← ازاش یک رأس بگذار در L(G)





(L(G))

e_1 به e_2 و e_4 وصل است (یالها)
در L(G) v_1 را به v_2 و v_4 وصل می کنیم

یه رأس زمانی مجاور است که بینشون یال باشد.

نکته: یک گراف همبند است اگر و تنها اگر گراف یالی آن هم، همبند باشد.

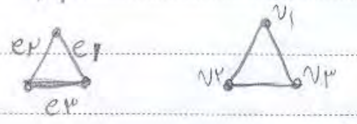
* اگر H زیرگراف G باشد آنگاه $L(H) \le L(G)$ است.
و عکسش هم حتماً برقراره.
$H \le G \Longleftrightarrow L(H) \le L(G)$

* اگر H یکریخت باشد با G آنگاه
$H \cong G \Rightarrow L(H) \cong L(G)$
ولی عکسش اصلاً برقرار نیست.

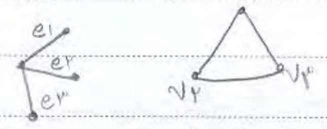
$\times\ L(H) \cong L(G) \Longrightarrow H \cong G$ غ

مثال نقض

K_3 ← گراف یالی اش

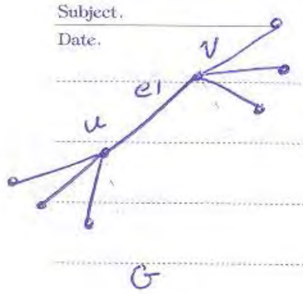


$K_{1,3}$



* گراف یالیشان یک شکل است ولی گراف خودشان یک شکل نیست.

درجه هر رأس در گراف تالی :



$$\boxed{\underset{L(G)}{d(v_i')} = d(u) + d(v) - 2}$$

v_i'

$$\sum_{v_i \in L(G)} d(v_i) = ? \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 2m$$

(تمرین) حاصله بعداً اثبات بشود بیاریم برایش

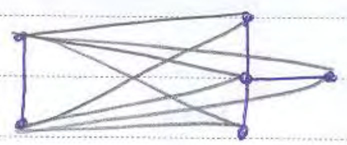
اعمال روی گرافها :

اجتماع : $G_1 \cup G_2$ (همه رأسهای G_1 و G_2 و یالهای G_1 و G_2 را کنار هم بگذاریم)

اشتراک : $G_1 \cap G_2$ (رأسها و یالهای مشترک را بگذاریم پیش هم)

یال منطقی : $G_1 \vee G_2$ گراف G_1 و G_2 را بکش ، هر رأسی که توی G_1 هست به تمام رئوس G_2 وصل کن و هر رأسی که توی G_2 هست به تمام رئوس G_1 .

مثال)



G_1 G_2

ص ۳۵ (حتماً حتماً امتحانی) ـ حفظ

$n(G_1 \cup G_2)$: تعداد رأسهای اجتماع $= n_1 + n_2 - n(V_1 \cap V_2)$

$n(G_1 \cap G_2)$: تعداد رأسهای اشتراک $= n(V_1 \cap V_2)$

$n(G_1 \vee G_2)$ تعداد رأسهای یال منطقی $=$

حاصلضرب دکارتی گراف : $G_1 \times G_2$

$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$

$$V_1 \times V_2 = \{ \underset{\text{زوج مرتب}}{(v_i, v_j)} \mid v_i \in V_1 , v_j \in V_2 \}$$

مثال) $V_1 = V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$

$V_2 = V(G_2) = \{v_4, v_5\}$

$= \{(v_1, v_4) (v_1, v_5), (v_2, v_4) (v_2, v_5) (v_3, v_4) (v_3, v_5)\}$

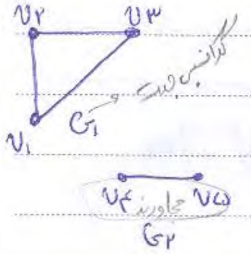
http://www.ab-rafiee.com

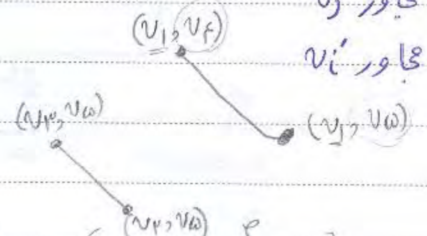
Subject.
Date.

$v(i,j)$ با (v'_i, v'_j) مجاورند اگر و تنها اگر:

یا ① $v_i = v'_i$ و v_j مجاور v'_j

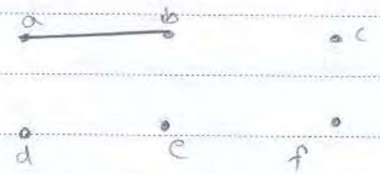
② $v_j = v'_j$ و v_i مجاور v'_i





$$V(G_1 \times G_2) = \left\{ \begin{matrix} \overset{a}{(v_1, v_4)} & \overset{c}{(v_2, v_4)} & \overset{e}{(v_3, v_4)} \\ \underset{b}{(v_1, v_5)} & \underset{d}{(v_2, v_5)} & \underset{f}{(v_3, v_5)} \end{matrix} \right\}$$

بقیه مقدمات فصل ۱ را حتماً خوانده شود.



اول رأس‌ها را وسط راه می‌گذاریم

بعد نگاه می‌کنیم کدام دو زوج مرتب یکی مساوی و دیگری باهم مجاور باشند.

گراف بدون جهت u — v $\{uv\}$ و گراف جهت دار $u \to v$ (u,v) به صورت زوج مرتب

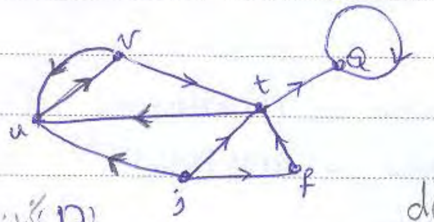
از u به v

فصل ۲:

ص ۴۰

درجه ورودی و درجه خروجی

$d^+(v_i)$ $\quad d^-(v_i)$



گراف جهت‌دار (D)

$d^+(u) = 1$

$d^-(u) = 3$

$$\sum d_i^+ = \sum d_i^- = m = \text{تعداد یال‌ها}$$

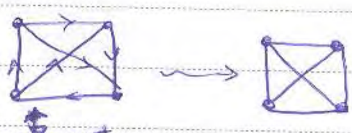
گراف زمینه D، گرافی است که جهت گراف D را برداریم.

PAPCO

Subject.
Date.

تورنمنت: گراف جهت داری است که گراف زمینه اش کامل باشد.

گراف حاصل از حذف جهت در گراف جهت دار را گراف زمینه گویند.



Tornoment

کاربرد گراف جهت دار = حمل و نقل ص ۴۳ و ۴۴ خوانده شود. ص ۴۵ تمرین

فصل ۳: گراف همبند

می خواهیم گرافی همبند درست کنیم با کمترین یال و قوی ترین همبندی را داشته باشد.

همبند

رأس برشی: رأس v از گراف G را رأس برشی گویند هرگاه $G-\{v\}$ ناهمبند باشد.

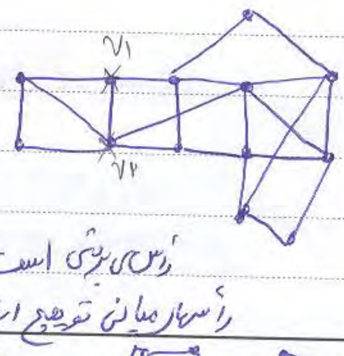
مجموعه رئوس برشی: زیرمجموعه $V' \subseteq V(G)$ را گویند مجموعه رئوس برشی اگر $G-\{V'\}$ ناهمبند باشد.

یعنی اگر آن رأس (ها) را برداریم از گراف مان، گراف ناهمبند می شود به آن رأس، رأس برشی می گویند.

اگر تعداد اعضای V' که با k نشان می دهند، $|V'|=k$ و V' برشی باشد

کاردینالیتی

برش k رأسی



رأس برشی $= k=2$

برش ۲ رأسی

کات مرز درونی

رأس برشی است که فقط نقطه درونی یک مسیر باشد

رأسهای P_1 و P_2 باهم مشترک نیست

رأسهای میانی تو هیچ اشتراکی بین آنها نباشد

P_1 P_2 اگر رأس مشترک باشد که ایجاد دوری کند که رأس برشی می شود!

Subject.
Date.

یال برشی : دور ایجاد نکند یا (یالی که در هیچ دور نباشد).

۱۰۰٪ سؤالی

ج ۴

* گراف منتظم : درجه تمام رئوس یکسان باشد.

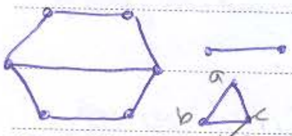
K منتظم گویند اگر درجه تمام رئوس K باشد.

گراف مثلثی : اگر ۳ـ منتظم باشد.

دو رأس غیر برشی

قضیه) هر گراف همبندی حداقل ۲ رأس غیر برشی دارد. $(n \geq 2)$

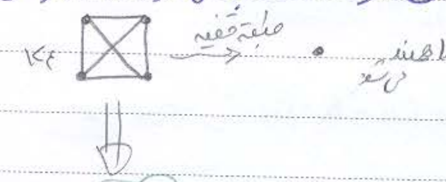
n = تعداد رأس ها — تعداد رئوسش بیشتر از ۲ باشد.



اگر هر رأس آن برداریم (می شود) با برداشتن ۱ رأس باز هم همبند است.

نکته) گراف بدیهی (تک رأسی) ناهمبند است در کتاب ما

قضیه) در گراف K_n (کامل) با حذف $n-1$ رأس گراف ناهمبند می شود. مانند رأس تنها



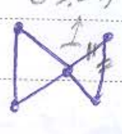
گراف بدیهی $V(G)=\{u\}$

$E(G)=\varnothing$

۳ـ همبند است.

* گراف G را r ـ همبند گویند اگر با حذف حداقل r رأس ناهمبند شود.

رأس برشی



تمام گرافهایی که یک رأس برشی دارند ⟸ ۱ـ همبند هستند

اگر دو رأس برشی داشتند ⟸ ۲ـ همبند هستند

$K(G)=1$ $\lambda(G)=2$ λ با حذف حداقل تعداد یالها می شود گراف ناهمبند می شود.

Subject.
Date.

تعریف $K(G)$: حداقل تعداد رأسهایی که با حذف آن گراف ناهمبند می‌شود = عدد کاپای گراف گویند.

$\lambda(G)$: حداقل تعداد یالهایی که با حذف آن گراف ناهمبند می‌شود "لاندای" گراف گویند.

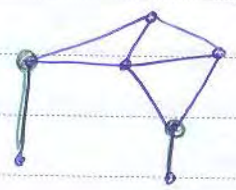
با حذف ۱ یال

حداقل چند تا رأس بردارم گراف ناهمبند می‌شه ← اینکه تعداد رأسها را بگی

مثال) اگر در گراف یک رأس از درجه ۱ داشته باشیم ⟸ حتماً یال برشی داریم.

$K(G)=1$ ⟸ چون رأس برشی داریم

$\lambda(G)=1$



$\Delta = 4$

قضیه) خیلی مهم

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

حداقل درجه در گراف

دقت: حداقل درجه گراف ۱ باشد ⟸ $\lambda=1$ است. چون یال برشی داریم.

۱۰۰٪ سؤال از این مباحث $K(G)$ و $\lambda(G)$.

وقتی همبند رأسی گویند منظور همبند رأسها هست ولی اگر لفظ یال را آورد همبند یالی داریم.

* در گراف یالی $L(G)$

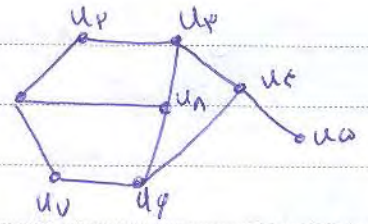
⟸ $\lambda(G) \leq K(G)$

$\lambda(G) \leq L(K(G))$

{ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ } اعضا ران مجموعه خود مجموعه باشند ⇐ مجموعه‌ای از مسیرها .

تعریف : خانواده متشکل از حداقل ۲ رأس را درونی مجزا گویند هرگاه هیچ رأسی نقطه درونی بیش از یک مسیر در خانواده نباشد.

مثال)



$P : \{P_1 , P_2 , P_3\}$

$P_1 = u_1 u_2 u_3$ $\quad$ $P_2 = u_7 u_6 u_8$

$P_3 = u_4 u_5$

چون P_1 و P_2 و P_3 در هیچ کدام رأس مشترکی بینشان نباشد ⇐ کد است ⇐ درونی مجزا است

تعریف : $G_1 (n \geq 2)$ ، ۲-همبند است اگر و تنها اگر هر دو رأس G توسط دو مسیر درونی مجزا بهم متصل شوند.

با حذف حداقل ۲ رأس ناهمبند شود

نکته :

هیچ رأس مشترکی در آن ⇐ دور تشکیل شد ⇐ یال برشی نداشته باشیم ⇐ قطعاً رأس برشی هم نداریم

دو مسیر باهم مشترک نیست

⇐ ۲-همبند ✓

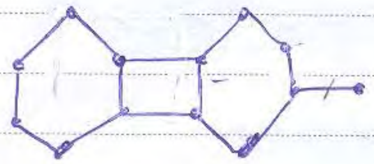
رأس برشی رو برداریم

ولی اگر مثل شکل

، f رأس مشترک است ، اگر مسیر بینشون رو حذف کنیم در شود رأس برشی که آنگاه ، به جای ۲-همبند می‌شود ، ۱-همبند

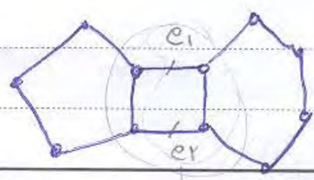
البته در این صورت قبلش فرض می‌کنیم که فقط ۱ مسیر یک .

تعریف :



همبندیالی $\quad$ $\lambda(G) = 1$

رأس برشی هم نداریم



$\lambda(G) = 2$ $\quad$ $\{e_1 , e_2\}$ برش یالی

همبندی یالی (دوری)

حداقل تعداد اعضای

توکل‌کل حسن نورمحمدی دانلود لینک

کلی نظریه گراف

Subject.

Date.

فرض کنید G یک گراف ساده همبند باشد، همبندی یالی دوری G را برابر تعداد مینیمم یال‌های G که حذف آنها باعث ناهمبند شدن G شود و حداقل یکی از آنها در دوری وجود داشته باشد.

فصل ۴: درخت ۱۰۰٪ سؤال مهم و امتحانی

یک گراف همبند بدون دورهای

نمی‌تونه صفر باشه چون همبند است.

$K(G) = 1$ یا ~~0~~

$\lambda(G) = 1$ چون دور نداریم ⇐ یال برشی است

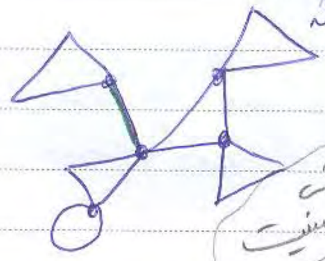
$\lambda(G) = 1$ است.

نمونه سؤالات توی سایت ab_rafiee دانلود و حل کنید می‌خواهم

مثال) در گراف ساده G کدامیک از عبارت‌های زیر می‌تواند برقرار باشد؟

مثال) تعداد یال‌های برشی در گراف مقابل برابر است با:

روش گشتن: یالی که توی دور نباشد



تعداد یال‌هایی که فرد باشد

چون دور فرد دارد

گراف دوبخشی نیست

الف) ۳

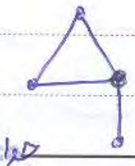
ب) ۱

ج) ۲

د) یال برشی ندارد

تعریف: یک گراف G جدا ناپذیر گویند هرگاه نابدیهی و همبند بوده و رأس برشی نداشته باشد.

مثال)



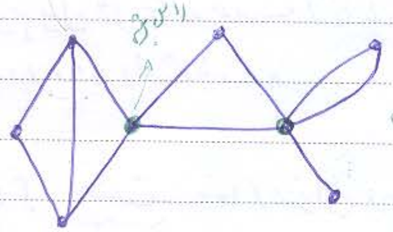
جداپذیر

✓ جدا ناپذیر

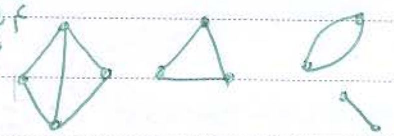
Subject.
Date.

بلوک: زیرگراف ماکسیمال جداناپذیر از گراف G را بلوک می‌گویند.

زیرگراف ماکسیمالی که راس برشی نداشته باشه



۴ تا بلوک



ص ۶۶ ـ تبصره (خیلی ی ی ی مهم)

* برای هر بلوکی که تعداد راسهایش $n \geq 3$ باشد، گراف ۲-همبند است.
* کل گراف اجتماع تمام بلوکهایش است.
* بلوکها حداکثر در یک راس مشترک هستند
* هر راسی که برشی نباشد دقیقاً به یکی بلوک هستند.

برشی مشترک در بلوکها هستند

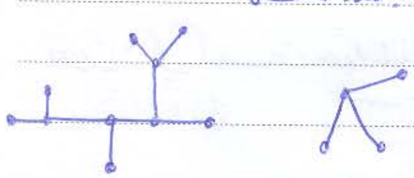
((برای پیدا کردن بلوک کافی است راسهای برشی آن را پیدا کرد))

* درخت چون دور ندارد، هر دو راس آن از طریق یک مسیر بهم وصل است؛

همه یالهایش یال برشی‌اند

ج ۵

* امتحان میان ترم: ۲۵/A تا هر جایی که درس بدهند ـ تستی



(۳) درخت: گراف همبند بدون دور

جنگل: گراف ساده بدون دور

نکته: هر مؤلفه جنگل یک درخت می‌شود

G

G یک جنگل است. $w=2$

Subject.

Date.

نکته: هر درخت خودش جنگل هست. حتی گراف بدیهی

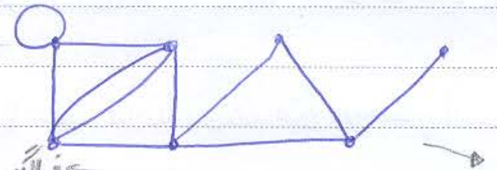
هر یال درخت یال برشی است. چون گراف درخت دور ندارد ⟸ هر یالش برشی است.

قضیه: G درخت است ⟺ هر یال آن برش باشد.

(قضیه)

نکته) بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر یکتا وجود داشته باشد ⟺ G درخت است

نکته: هر گراف همبند شامل یک زیرگراف فراگیر (درخت) است.



هم زیرگراف است   هم درخت است هم همبند هم همه رئوس را دارد

⟸ درخت فراگیر

درخت فراگیر

دقیقاً تعداد یالهای درخت $n-1$ یال دارد. n تعداد رئوس G

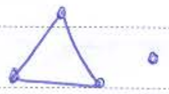
مجموع درجات رئوس در گراف G درخت:

$$\sum d_i = 2(n-1)$$

Subject.
Date.

همبند

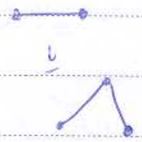
(قضیه) یک گراف درخت است اگر و تنها اگر G دارای n رأس و $n-1$ یال باشد.



$n=4$
$m=3$

⟶ ولی چون همبند نیست ⟹ گراف ما درخت نیست.

قضیه) هر درخت با $n\geq 2$ حداقل دو رأس از درجه ۱ دارد.



که رأس آویخته گویند

حداقل درجه رئوس گراف G

قضیه) اگر $\delta(G)\geq 2$ باشد حتماً G درخت نیست حتماً دور وجود دارد.

$\delta=1$
$\Delta=5$

ماکسیمم درجه گراف = $\Delta(G)$

(قضیه) درخت که اصلاً دور ندارد حتماً دوبخشی است.

یادآوری: G دوبخشی است ⟺ فاقد دور فرد باشد، دور زوج مشکلی ایجاد نمی‌کند

دور فرد دارد ⟸ دوبخشی ✗

فاقد دور فرد ⟸ دوبخشی ✓

قضیه) اگر درخت T را داشته باشیم و دو رأس u و v دو رئوس ناهمجوار به آن اضافه کنیم:
$T(G)+uv$

⟹ شامل دور یکتاست.

PAPCO

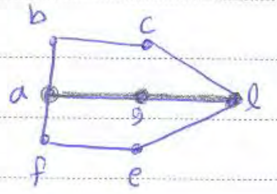
Subject.
Date.

نکته) اگر تعداد یالها بزرگتر و مساوی تعداد رأسها باشد آنگاه گراف شامل دور است.

⇓

درخت نیست.

$d(u,v) =$ طول کوتاهترین مسیر بین u و v



$d(u,v) = 2 =$ تعداد یالها

۱۰۰٪ ازش امتحانی

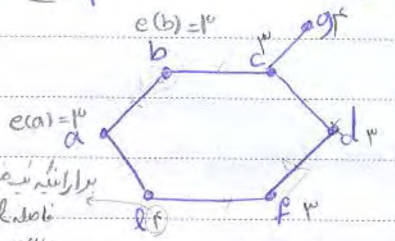
خروج از مرکز:

برای هر رأسی، خروج از مرکز تعیین می‌کنند.

خروج از مرکز رأس u:

$$e(u) = \max\{d(u,v) : v \in V(G)\}$$

باید برای هر رأسی مثل a فاصله‌اش را (کوتاهترین مسیر) بین بقیه رئوس حساب کن و از بین آنها ماکسیمم را حساب کن



برای اینکه بیشترین فاصله را تعیین کنیم فاصله‌ها (نقطه) را تا دورترین آن می‌گیریم

$$e(a) = \max\{d(a,b)\ d(a,c)\ d(a,d)\ d(a,f)\ d(a,l)\ d(a,g)\}$$

$$= \max\{1, 2, 3, 2, 1, 3\} \overset{\max}{=} \Rightarrow 3 =$$ خروج از مرکز رأس a

کوتاهترین مسیر

$$e(u)$$

$3 = r(G)$ $=$ شعاع گراف (min)

(max) قطر گراف $= diam(G) = 4$

مرکز گراف: رأس v را مرکز گراف گویند هرگاه $e(u) = r(G)$

مرکز گراف $\{a, b, c, d, f\}$

اگر رأس شعاع گراف = خروج از مرکز باشد ⇐ رأس مرکزی است.

رأس u مرکزی است $\Longleftrightarrow$ $e(u) = r(G)$ باشد.

PAPCO

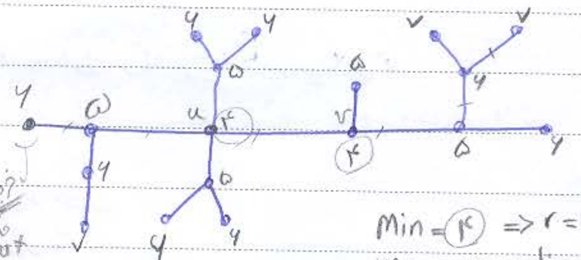
Subject. $e(u) = \max\{d(u,v) : v \in V(G)\}$

Date.

شعاع یک گراف: $r(G) = \text{Min}\{e(u) : u \in V(G)\}$

قطر گراف: $\text{diam}(G) = \text{Max}\{e(u) : u \in V(G)\}$

مثال)



خروج از مرکز این رأس

فاصله دورترین مسیر تا max

این رأس

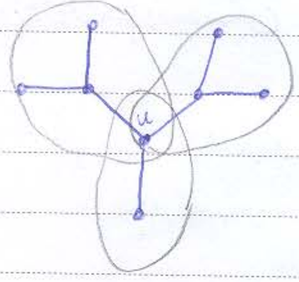
$\text{Min} = 4 \Rightarrow r = \text{Min}\{\ \} = 4$

$\text{Max} = 7 \Rightarrow \text{diam} = \text{Max}\{\ \} = 7$

رئوس مرکزی $\{u, v\}$

تعریف شاخه: یک شاخه در رأس u از درخت T یک زیردرخت ماکسیمال شامل u است که u نقطه پایانی آن باشد.

نکته) تعداد شاخه‌ها در u برابر $d(u)$ درجه می‌باشد.

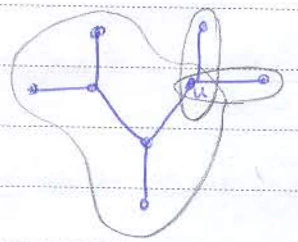


برابر هر رأس مثل u

شاخه می‌گویند تمام زیردرخت‌ها را ماکسیمالی که خود u را هم شامل می‌شود

* هر رأس به تعداد درجه u شاخه دارد *

$\deg(u) = 3 \Rightarrow$ ۳ تا شاخه داریم



تعداد یالهای در هر شاخه را شمردیم $\quad 1, 1, 5 \xrightarrow{\text{Max}} 5$

وزن رأس u

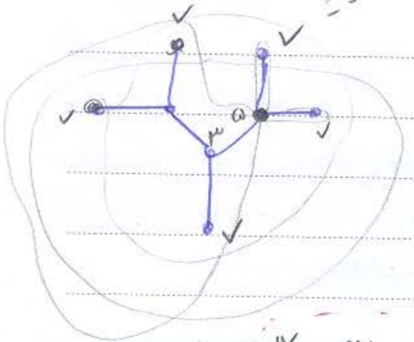
وزن یک رأس:

وزن رأس u از درخت T را بیشترین تعداد یالها در هر شاخه u گویند.

Subject.
Date.

تعریف مرکز ثقل: رأسی که بیشترین وزن را داشته باشد مرکز ثقل گویند.

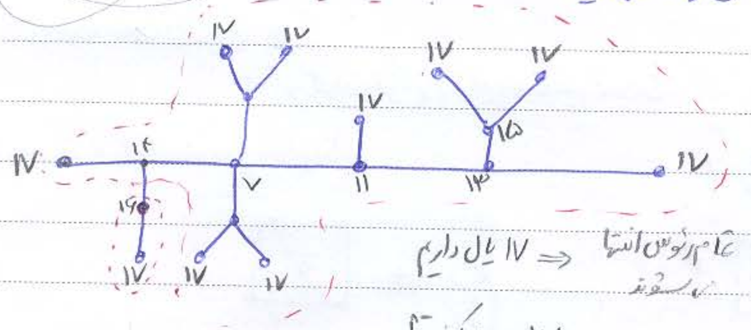
اول تمام وزن‌های رئوس را محاسبه کرده و max می‌گیریم



مرکز ثقل = ۷

در درخت
برگهای ما مرکز ثقل ما هستند و شاخه = کل گراف
n-۱

مثال ۱) وزن هر رأس را محاسبه کنید.



هر رأس
مرکز ثقل = n-۱

تمام رئوس انتها شوند ⇒ ۱۷ یال داریم

۱۷ = مرکز ثقل

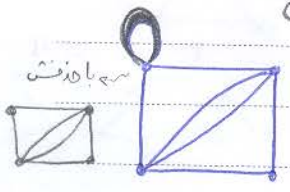
اگر ترافیک همبند باشد چند گراف فراگیر می‌تواند داشته باشد؟

حل: شمارش تعداد درخت‌های فراگیر:

مقدمه)

تعریف: یال e از گراف G را منقبض شده گویند اگر از G حذف شود و رئوس پایانی‌اش با هم یکی گرفته شوند. گراف حاصل را با G.e نشان می‌دهند.

گراف انقباض شده روی یال e



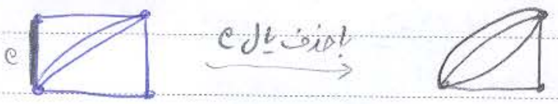
اول یال را حذف کن
دو سر رأس را با هم
وصل کن

اگر یال را برداریم

G.e ← هم رأس و هم یال کاهش پیدا کرد چون یالش غیر حلقه بود.

$V(G.e) < V(G)$

Subject.
Date.

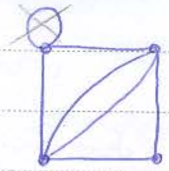


قضیه)

فرض کنید گرافی داشته باشیم که تعداد درختهای فراگیر آن را می‌خواهیم بدانیم

$$\underset{\text{تعداد درختهای فراگیر}}{T(G)} = \underset{\text{تعداد درختهای انقباض شده}}{T(G.e)} + \underset{\text{تعداد درختهای یال حذف شده}}{T(G-e)} \quad \text{(دگالایق)}$$

می‌آییم دونه دونه یالهایش را حذف می‌کنیم تا به شکل‌های ساده دربیاید و از روی آن محاسبه کنیم.
با استفاده از قضیه انقباض که یالهایی را انتخاب کن که سر تقاطع جا بیا

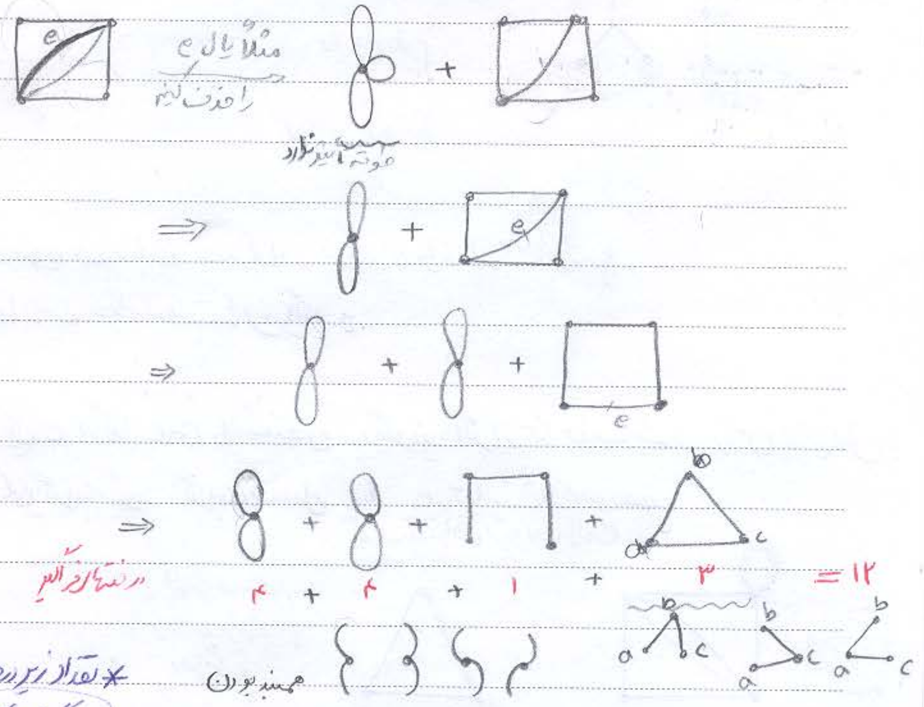


سؤال) تعداد درختهای فراگیر؟ ۱۲ تا

۱۲ تا زیرگراف فراگیر می‌توانیم پیدا کنیم که درخت باشد.

طوقه در تعداد تعداد درختهای ما تاثیر ندارد

۱۱ تعداد درختهای پوشش برابر است



* تعداد زیر درختهای فراگیر در گراف کامل

$T(K_n) = n^{n-2}$

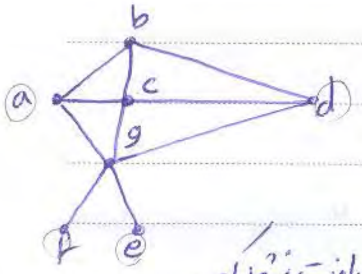
فصل ۵

Subject.
Date.

صرم ۹۴ ـ نتیجه ۵.۴.۴
صرم ۹۵ ـ قضیه ۱.۴.۴ ۶۲
صرم ۹۵ ـ لم ۳.۴.۴

تعریف: $S \subseteq V$ مستقل گویند هرگاه هیچ دو رأسی از S مجاور نباشند.
یال مشترکی بینشان نباشد.

مثلاً



$S_1 = \{a\} \subseteq V$ ✓ مستقل است

$S_2 = \{a, c\}$ ✗

$S_3 = \{a, d, e\}$ ✓

ماکسیمم: به مجموعه مستقل S از رئوس ماکسیمم گویند هرگاه S' یافت نشود که $|S| < |S'|$

تعداد اعضای S = کاردینالی

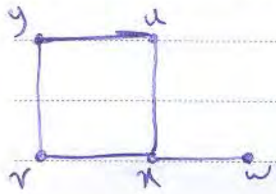
S_1 ماکسیمم $= \{a, d, e, f\}$

هیچ کدام از رأس‌ها باهم مجاور نیستند.

ـــ روی تعداد اعضای مجموعه داریم صحبت می‌کنیم
بیشترین تعداد اعضا

ماکسیمال: S را ماکسیمال گویند هرگاه S' یافت نشود که $S \subset S'$

مثال)



$S_1 = \{y, x\}$ ماکسیمال

$S_2 = \{w, u, v\}$

تک تک تک عضوی هم

$S_3 = \{u, v\}$

مستقل ~~ماکسیمم~~ شوند مثل $\{y\}$ و $\{x\}$ و ...

نتیجه اش

$Max = 3$

Maximal ـــ برای انکار باید ببینیم آیا

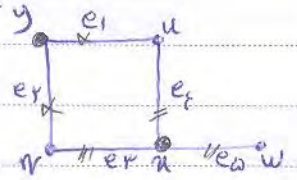
$S_1 \subseteq S_?$ هست ؟

چون پیدا نمی‌کنیم ← S_1 ماکسیمال است.

S_1 و S_2
ماکسیمال است

مجموعه ای که اندازه بزرگ هست که زیر مجموعه ای
ـ هیچ مجموعه بزرگتری قرار نمی‌گیره

همه ماکسیمم‌ها Maximal هستند.



تعریف پوشش: به زیرمجموعه $K \subset V$ یک پوشش رأسی گویند هرگاه هر یال در G با یک رأس K مجاور باشد.

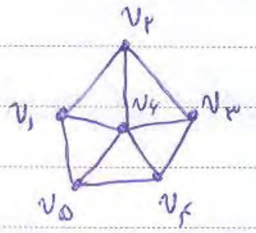
الان $\{y, x\}$: $y \leftarrow e_1$ و e_2 رو پوشش می‌ده

$x \leftarrow e_4$ و e_3 و e_5 روی پوشش

درسته که می‌شه کل رأس‌ها را انتخاب کرد ولی حداقل تعداد رئوس را انتخاب می‌کند.

یه مجموعه رئوس باید بگیم که همه یال‌ها رو بپوشونه

لزومی هم نداره این مجموعه رئوس برای پوشش مستقل باشند



مثال) $\beta = 4$ عدد پوشش

$\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$

$\{v_5, v_2, v_6, v_3\}$

هردو Min هستند چون از این کمتر نمی‌تونیم رأس جدی بذاریم که همه یال‌ها رو بپوشونه و هردو Minimal

پوشش مینیمم: K را پوشش مینیمم گویند هرگاه K' پیدا نشود به طوریکه $|K| > |K'|$

با کمترین رئوس پوشش بدهیم

پوشش مینیمال: K را پوشش مینیمال گویند هرگاه K' وجود نداشته باشد به طوریکه $K' \subset K$ باشد

پوشش اگر هیچ زیرمجموعه از ندانسته باشه

مثال) $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

پوشش هست ولی نه مینیمم هست نه مینیمال

مینیمال: مجموعه ای که انقدر کوچیک هست که نمی‌تونه زیرمجموعه ی مجموعه دیگه باشه

$() \not\subset ()$

تعداد اعضای مستقل مجموعه ماکسیمم $\alpha = \{v_2, v_4\}$ $\qquad \alpha = 2$

$\{v_1, v_3\}$

$\{v_2, v_5\}$

$\{v_3, v_5\}$

$\alpha + \beta =$ تعداد کل رئوس گراف

Subject.
Date.

۱۰۰ سؤالی و اثباتی این مباحث

عدد استقلال : تعداد اعضای مجموعه مستقل ماکسیمم را با α نشان می دهند

عدد پوشش : تعداد اعضای پوشش رأسی مینیمم را با β نشان می دهند

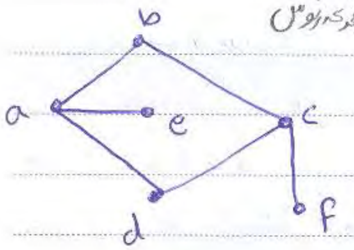
نکته) $\alpha + \beta = n$

تعداد رئوس کل گراف

قضیه) $S \subseteq V$ مستقل است $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{V \setminus S}_{V-S}$ یک پوشش باشد.

مجموعه رئوس

مثال)

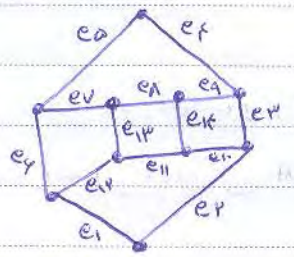


$S = \{b, e, d\}$ مستقل

$V - S = \{a, c, f\}$ پوشش است ✓

تعریف جورساز : به هر زیرمجموعه $M \subset E$ جورساز گویند هرگاه هیچ دو یالی در M مجاور نباشد.

یه زیرمجموعه از یالهاست که مستقل باشد



$M_1 = \{e_1\}$ ✓

$M_2 = \{e_1, e_{11}\}$ ✓

$M_3 = \{e_5, e_8, e_{11}, e_6\}$ ✓

پوشش یالی : $M \subseteq E$ را پوشش یالی گویند هرگاه تمام رئوس را پوشش دهد به عبارت دیگر هر رأس حداقل روی انتهای یک یال از M باشد.

هر گراف پوشش رأسی داره ولی هر گرافی لزوماً پوشش یالی نداره

نکته : گراف G پوشش یالی دارد $\Longleftrightarrow$ $\delta \geq 1$ باشد.

به عبارت دیگر رأس تنها نداشته باشیم. $\leftarrow$ $\delta \neq 0$

PAPCO

Subject. جور
Date.

جورساز ماکسیمم: M ~~ماکسیمال~~ ماکسیمم است $\Longleftrightarrow$ $\nexists M'$ s.t $|M|<|M'|$

جورساز ماکسیمال: M ماکسیمال است $\Longleftrightarrow$ $\nexists M'$ s.t $M \subset M'$

α' = تعداد اعضای جورساز ماکسیمم

β' = تعداد اعضای پوشش یالی مینیمم

$\alpha'+\beta'=n$

تعداد کل رئوس گراف

همیشه درست نیست تنها زمانی درست است که $\delta>0$ باشد

زمانی $\delta>0$ است که پوشش یالی داشته باشیم

سؤال) کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\alpha+\beta=n$ و $\alpha'+\beta'=n$

۲) $\alpha+\beta=n$ و $\alpha'+\beta'=|E|$

۳) $\boxed{\alpha+\beta=n \text{ و } \alpha'+\beta'=n,\ \delta>0}$

۴) گزینه ۱ و ۳

~~مسیر M متناوب:~~

جورساز

تعریف: مسیر M-افزوده در G مسیری است که یالهای آن متناوباً بین M و E−M بوده و رأسهای ابتدایی و پایانی آن M-اشباع نشده باشند.

از M متناوب بوده

اگر رئوس ابتدا و انتهای مسیر خارج مسیر باشد.

مسیر M-متناوب: یک مسیر را M-متناوب گویند هرگاه یالهای آن متناوباً بین E−M و M باشد.

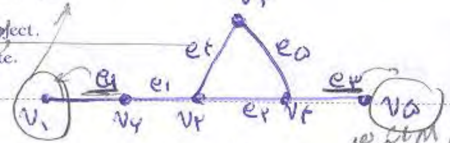
رئوس مشترک ندارد

یالهای آن یکی در میون داخل M و خارج M باشد.

اولی باید خارج M باشد

M-اشباع شده: اگر $e=uv$ یال در جورساز M باشد گوییم رأس‌های پایانی u و v از e توسط M جور (اشباع) شده اند.

مثال)



از طریق e_1 و e_5 پوشش داده شده اند

مسیر $P_1 = \{e_6\, e_1\, e_3\}$

$P_2 = e_1\, e_2\, e_3$

اولی همه باید خارج M باشد بعد یکی در میون خارج و داخل

M افزوده

جورساز $M = \{e_1, e_5\}$

$$P_3 = \{\underset{E-M}{e_6}\ \underset{M}{e_1}\ \underset{E-M}{e_4}\ \underset{M}{e_5}\ \underset{E-M}{e_3}\}$$ مسیر M متناوب

مسیر M - افزوده = از دو جهت مسیر M متناوب است اگر از دو یالهای ابتدا و انتها را سرها و سرهای کنند v_1 و v_5 نه بعد این رئوس توسط M اشباع شده باشد

همه M افزوده ها باید M متناوب باشند اگر رئوس ابتدا و انتهای مسیر خارج مسیر باشد

اشباع شده: M متناوب است به شرطی که راس ابتدا و انتها رو به اول یال e_6 و e_3 اشباع شده است. این راس ها توسط یال M ها پوشش داده شده باشند. از طریق M یعنی M که این راس M افزوده یالی وجود دارد که

یالهایی هستند که توسط جورساز پوشش داده شده باشند

e_6 و e_3

$P_4 = \underset{E-M}{e_6}\ \underset{M}{e_1}\ \underset{E-M}{e_4}$ M متناوب

v_1 v_4 از طریق e_5 اشباع شده است. v_3

* سوال امتحانی) مثال) برای K_n ها α و β و α' و β' را پیدا کنید

$\beta' = n - \alpha'$

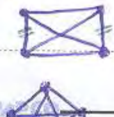
تعداد یالهای مستقل

$K_n \rightarrow \overset{\text{همیشه}}{\alpha = 1}$ و $\beta = n-1$ و $\alpha' = 1$ و $\beta' = 1$

از روی $\alpha + \beta = n$

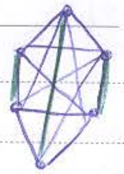
K_2 (زوج)  $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ $\alpha' = 1$ $\beta' = 1$

K_3  $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ $\underset{K}{\alpha' = 1}$ $\underset{K+1}{\beta' = 2}$

K_4  $\alpha = 1$ و $\beta = 3$ $\alpha' = 2$ $\beta' = 2$

K_5  $\alpha = 1$ و $\beta = 4$ $\alpha' = 2$ $\beta' = 3$

Subject.
Date.

K_6 

$\alpha=1$ و $\beta=5$ $\alpha'=3$ و $\beta'=3$

K_7 $\alpha'=3$ $\beta'=4$

$K_n \to$ زوج $n=2m \Longrightarrow \alpha'=\beta'=m=\frac{n}{2}$

$K_n \to$ فرد $n=2n+1 \Longrightarrow \alpha'=m$, $\beta'=m+1$

$\alpha+\beta=n$

مثال

$K_{17}=?$ فرد $\alpha=1$ و $\beta=16$ و $\alpha'=8$ و $\beta'=9$

$n=2m+1=17$

$\cancel{16} \to m=8$

$K_{18}=$ $2(8)+1$

تمرین ۱-۲ ص ۱۰۵ خیلی مهم . الگوریتم بیتر سن و خودمان بخوانیم

ج ۷

۵.۴.۱ ، ص ۱۰۶ قضیه

کمینه‌ها (۲۷ تا این فصل) ، ص ۱۰۸ - صورت تمرین ۳-۲ (حفظ)

ص ۱۱۰ قضیه Hal ۵.۴.۲

ص ۱۱۰ . قضیه ۵.۴.۳

ص ۱۱۱ ، لم بسیار مهم ۵.۴.۴ بسیار مهم و سؤال میز

ص ۱۱۲ ۵.۴.۵ ، قضیه

ص ۱۱۴ قضیه ۵.۴.۱۰

ص ۱۱۶ نتیجه ۵.۴.۱۱

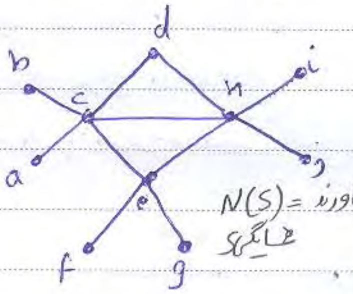
ص ۱۱۸ نتیجه ۵.۴.۱۵

PAPCO

ص ۱۲۲ ~~###~~ قضیه ۵.۵.۵

تعریف: فرض کنید $S \subseteq V$ که باشد، $N(S)$ مجموعه تمام رئوس مجاور با S می باشد.

مثال)



$S = \{c, g, i\}$

$N(S) =$ تمام رئوسی که با c مجاورند + تمام رئوسی که با g مجاورند + تمام رئوسی که با i مجاورند

$N(S) = \{b, a, d, e, h, j\}$

فصل ۶ «گرافهای اویلری و همیلتونی» «فصل ۱۰ را خودمان بخوانیم»

فصل ۷ خیلی خیلی مهم و سوال کنکور ← رنگ آمیزی گراف

گراف اویلری: یال تکراری نداشته باشد، همه یالها دیده شود، نداره راس تکراری اشکال

دور اویلری = گذرنده ای است که از هر یال دقیقاً یکبار عبور کرده باشد. «همه یالها یکبار حضور داشته باشند»

گراف اویلری = گرافی که شامل دور اویلری باشد، گراف اویلری گویند

مثال

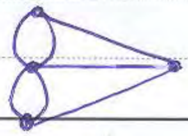
K_3 ✓

تو هر راس یال

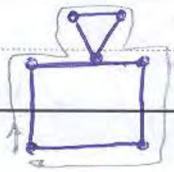
X K_4

K_5, K_4, ... هیچ کدام نیست

K_4 اصلاً دور ندارد ⇐ X



X



Subject. الف ⟺ ب و الف ⟸ ج و ج ⟺ ب و ....
Date.

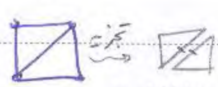
قضیه) عبارتهای زیر معادلند:

الف) گراف G اویلری است.

ب) درجه هر رئوس G عدد صحیح مثبت زوج است.

ج) گراف G را می‌توان به صورت اجتماع دورهای مجزا یالی نوشت.

مثلاً



تجزیه

دور مجزا یالی ×

چون یال مشترک بینشان است

اویلری ×

ولی

تجزیه

دو تا دور دارد

و دور مجزا یالی دارد.

پس اویلری ✓

نکته) هر گراف اویلری، همبند است.

(مهم) تمرین ۳.۱.۶ ص ۱۲۵ = تعداد دورهایی که یال گراف [توش] قرار می‌گیرد عددی فرد باشد.

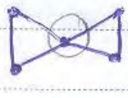
گراف همیلتونی: از همه رأسها عبور کند.

از همه راسها می‌گذرد — فاقد راس تکراری

دور همیلتونی: هر دور فراگیر را دور همیلتنی گویند.

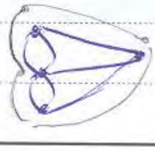
گراف همیلتنی: هر گراف شامل دور فراگیر (دور همیلتنی) را گراف همیلتنی گویند.

✓ K_3



×

✓ K_4



✓

اویلری نیست ولی همیلتنی است

✓ K_5 و ...

Subject.
Date.

همیلتنی نیست ×
ولی اویلری است.

گراف قابل ردیابی : هر مسیر فراگیر داشته باشیم ← گراف ان قابل ردیابی است.

نکته هر گراف همیلتنی قابل ردیابی است.
اما عکسش درست نیست

قابل ردیابی است.

قضیه ۶.۲.۴ ص ۱۳۱

گراف G همیلتنی است $\Longleftrightarrow$ $\forall S \subset V$

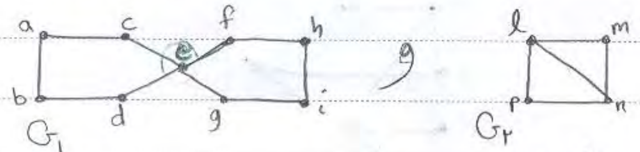
اگر و تنها اگر

$\Rightarrow \underbrace{W}_{\text{تعداد مؤلفه ها زیر همبندی گراف}}(G-S) \leqslant |S|$

زیرگراف های همبند

هر زیرمجموعه از رئوسش را که انتخاب کنیم

مثلاً



۹ رأس داریم
$2^9 - 1 =$ S زیرمجموعه داریم

۴ رأس داریم
$2^4 = 16 =$ S زیرمجموعه

چون تهی است
$16 - 1 = 15$
زیرمجموعه داریم

نکته : هر گرافی که شامل رأس برشی باشد ، همیلتنی نیست

اهمبند نیست

مثلاً $S_1 = \{l\}$ بگیریم

$G - S_1 = G - \{l\}$

گراف همبند ، مؤلفه همبندش یکی است.

$\rightarrow w(G-S_1) = 1 \leqslant 1$ ✓

$|S_1| = 1$ کاردینالیتی (تعداد اعضا)

$S_2 = \{l, m\} \rightarrow |S| = 2$

$G - S_2 \Rightarrow$

$w(G-S_2) = 1 \leqslant 2$

PAPCO

همیلتنی است.

Subject.
Date.

نکته) گراف همیلتنی ۲-همبند است.

تمرین ۲.۲ ص ۱۳۲ (حفظ)

* گراف هرشل و پترسن همیلتنی نیستند. شکل ۵.۴ ص ۱۰۵

گراف هرشل

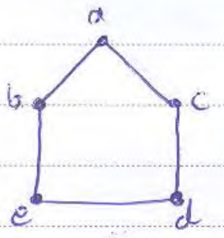
گراف پترسن (ستاره)

قضیه ۶.۲.۵ هر گراف ساده G با تعداد رئوس n بزرگتر مساوی ۳ ...

که اگر برای هر دو رأس ناجاور u و v داشته باشیم:

$d(u)+d(v) \geq n$

آنگاه G همیلتنی است.



G_1

$d(b)=2$
$d(d)=2$
$d(b)+d(d)=4 \ngeq 5=n$

اشکال کجاست؟

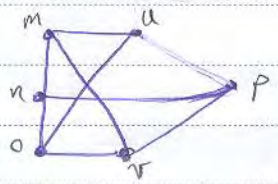
$\boxed{\text{قضیه یک طرفه است}}$

این G_1 همیلتنی است

ولی لزوماً $d(u)+d(v) \geq n$ برقرار نیست

هر دو گراف همیلتنی هستند

قضیه ۶.۲.۸ ص ۱۳۵



$G_2 \begin{cases} d(u)=3 \\ d(v)=3 \end{cases}$

برای هر دو رأس ناجاور که پیدا کنیم باهم جمع کنیم رابطه برقرار است

$d(u)+d(v)=6 \geq 6$ ✓

پس گراف همیلتنی است.

ص ۱۳۴

همه چیزشو بخونیم

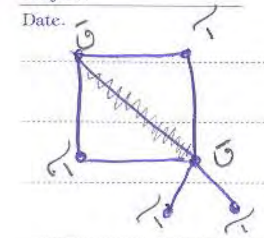
(تمرین ۲.۱۱ حل مهم)

PAPCO

Subject.

Date.

فصل ۷ جلسه هشتم - رنگ آمیزی گراف



با کمترین رنگهای ممکن با رنگهای مختلف، رأس‌های گراف را رنگ کنیم که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشد.

عدد رنگی $\chi(G)$ یعنی

$\chi(G)=2$

از رنگ گراف عبارتست از:

Min تعداد زیرمجموعه‌های مستقل از مجموعه رئوس $V(G)$.

رنگ آمیزی سره: رنگ آمیزی که هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند.

عدد رنگی = Min تعداد رنگهای مورد نیاز برای رنگ آمیزی سره گراف را عدد رنگی گویند

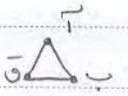
G را K- رنگی گویند هرگاه $\chi(G)=K$ باشد.

مثال) عدد رنگی

$$\chi(\underbrace{K_n}_{\text{گراف کامل}}) = n$$

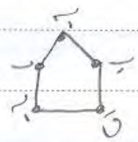
چون همه رأسها با هم مجاورند ⇐ به تعداد رئوس ما رنگ نیاز داریم

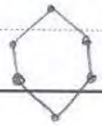
$$\chi(\underbrace{C_n}_{\text{دورهایی به طول } n}) = \begin{cases} 2 & n \text{ زوج} \\ 3 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

C_3  سه رنگ

C_4  دو رنگ

یک گراف ۳ رنگی است ⟺ یک دور فرد باشد.

C_5  سه رنگ

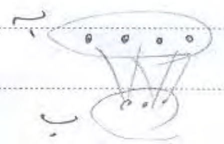
C_6  دو رنگ

FaPCO

Subject.
Date.

$\chi(T) =$ عدد رنگی درخت $= ۲$

هر درخت حتماً دوبخشی است.



$\chi(K_n^c) = 1$ $\chi(K_n) = n$

ص ۱۵۸

تمرین ۱.۴ - قضیه ۷.۰.۵

ص ۱۵۹ قضیه ۷.۱.۷ حفظ کردن صورت سوال

تمرین ۱.۸ و ۱.۵ (ص ۱۵۹)

تعریف گراف بحرانی: گراف G را بحرانی گویند اگر برای هر زیرگراف سره $H \subset G$ را داشته باشیم $\chi(H) < \chi(G)$

G و k- بحرانی گوییم اگر بحرانی و عدد رنگی آن k باشد.

نکته) اگر G همبند باشد داریم
$\chi(G-e) < \chi(G)$

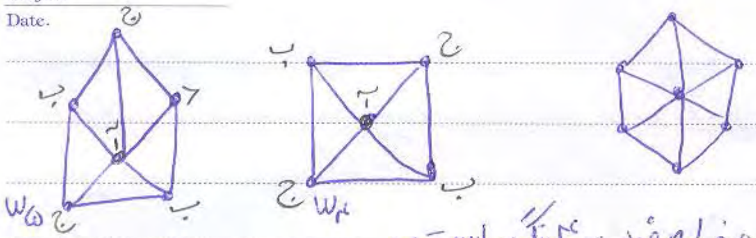
تصویر ۷.۲.۲ ص ۱۵۹

ص ۱۶۰ و ۱۶۱ تمامی تمرین‌ها شی مهم است. (کاملاً این دو صفحه حفظ)

$* \ \chi(G-v) = \chi(G-e) = k-1$

تمرین ۲.۱۱

Subject.
Date.



* هر چرخ با n فرد، ۴ رنگی است.

* هر چرخ با n زوج ۳ رنگی است. (صـ ۱۶۱) 11.2

مثلاً گراف چرخی
اگر C_4 و C_5 و C_6 بگیریم
و درونش یک رأس بگذاریم
و از اون رأس به بقیه رئوس
وصل کنیم به آن می‌گویند
گراف چرخی W_4

صـ ۱۶۲ فقط قضیه بروک
صورت سؤال خیلی مهمه

قضیه بروک: گراف G کامل نباشد و دور فرد نداشته باشد.

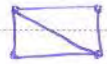
$$\chi \leq \Delta$$

ولی برای هر گرافی $\chi \leq 1+\Delta$ است

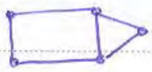
تمرین ۷.۲.۸ و ۷.۲.۹ . تمرین ۲.۱۴ و ۲.۱۵ صـ ۱۶۵

گراف‌های آزاد مثلث:
G را آزاد مثلث گویند اگر فاقد مثلث K_3 باشد.

آزاد مثلث ✓



آزاد مثلث ✗
چون دوتا مثلث دارد.



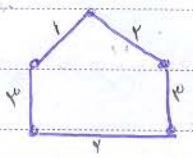
✗

✓

Subject.
Date.

ص ۱۶۷ (رنگ آمیزی یالی) $\chi'(G)$

M۱۱۶ تعداد رنگ برای رنگ آمیزی یال های گراف را عدد رنگی یالی گویند هرگاه هیچ دو یال مجاوری هم رنگ نباشد.

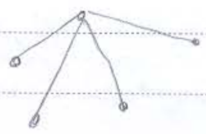


$\chi'(G) = ۳$

عدد رنگی $\chi(G)$

عدد رنگی یالی $\chi'(G)$

به نام دیگرش = شاخص رنگی



نکته) در گراف بدون طوقه $\chi' \geq \Delta$

(قضیه کونیگ)

کونیگ نکته) $\chi' = \Delta$ ـــــ زمانی باهم برابری باشند که G بدون طوقه و دوبخشی باشد

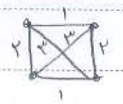
« $\chi(G)$ و $\chi'(G)$ برای گرافهای بدون طوقه است »

قضیه ۷.۴.۴ ، ص ۱۶۹

رأسی $\chi(K_n) = n$

$K_۳ \longrightarrow ۳$

یالی $\chi'(K_n) = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ n-1 & n \text{ زوج} \end{cases}$



RaPCO

Subject.

Date.

درحالت کلی $\chi' \leq 1+\Delta$

$\chi' \leqslant \Delta$

$1+\Delta \geqslant \chi' \geqslant \Delta$

$\underbrace{1+\Delta}$ گرافهای رده دوم هستند ، $\underbrace{\Delta}$ گرافهای رده اول هستند

نکته

(گرافهای دوبخشی ، گرافهای رده اول هستند چون)

$\chi' = \Delta$

تعریف ص ۱۷۱

گرافهای رده اول : اگر $\chi' = \Delta$

گرافهای رده دوم : $\chi' = 1+\Delta$

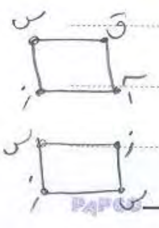
ص ۱۷۹ چندجمله ای رنگی

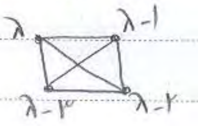
فرض می کنیم که به ما λ تا رنگ می دهند و می گویند گراف G را با استفاده از این رنگها به چند حالت می توان رنگ آمیزی کرد ؟

رنگ آمیزی سره = یا سه رئوس مجاور هم رنگ نباشد

تعریف چندجمله ای رنگی : به تعداد حالت هایی که یک گراف را می توان با λ تا رنگ ، رنگ آمیزی سره کرد چند جمله ای رنگی گویند و با $f(G, \lambda)$ نشان می دهند .

مثال λ رنگ = $\{$ قرمز ، سبز ، آبی ، ... $\}$ = λ

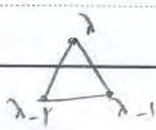




$f(K_4, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ چندجمله ای رنگی

$f(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-(n-1))$

$\lambda = n+1$



تعداد کل حالات $\Longrightarrow f(K_3, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$\lambda < \chi \Rightarrow f(\lambda, G) = 0$ است.

نکته) اگر $\chi > \lambda$ باشد، چندجمله‌ای رنگی ما صفر می‌شود.

قضیه)

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ n-1 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

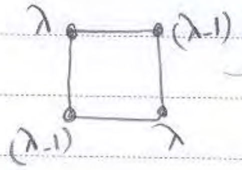
$$f(K_n, \lambda) = \lambda \dots (\lambda - n + 1)$$

$$f(K_n^c, \lambda) = \lambda^n$$

قضیه)

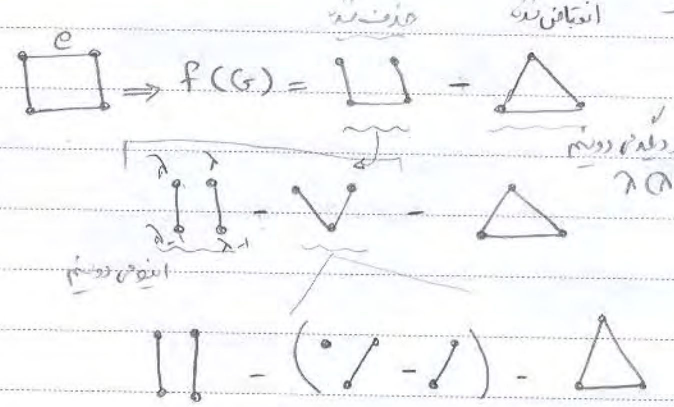
$$f(G, \lambda) = f(G - e, \lambda) - f(G \cdot e, \lambda)$$

مثال)



$\longrightarrow \lambda^2 (\lambda-1)^2$

یه دفعه یالی بر می‌داریم
یالی را برمی‌داریم که با حذفش گراف را همبند نگه داره



جواب $= \lambda^2(\lambda-1)^2 - \lambda^2(\lambda-1) + \lambda(\lambda-1) - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

Subject.
Date.

تمرین ۷.۱ ص ۱۷۹ ص ۱۸۱ و ۱۸۲ بسیار بسیار مهم و سؤال خیز

خواص چندجمله‌ای‌های رنگی:

۱) اگر $|V(G)| = n$ باشد، چندجمله‌ای رنگی‌اش از درجه n است.

۲) چندجمله‌ای رنگی تکین است یعنی ضریب λ^n یک است.

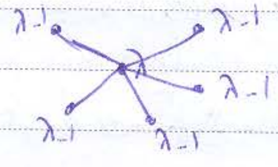
۳) ضریب λ^{n-1} عدد $-m$ می‌باشد (m تعداد یال‌هاست)

۴) چندجمله‌ای رنگی فاقد عدد ثابت است.

۵) علامت ضرایب چندجمله‌ای متناوباً مثبت و منفی می‌باشد.

قضیه) G درخت است $\iff$ $f(\lambda, G) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$

مثال)



$|V(T)| = 6$

$f(T, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^5$

ص ۱۸۲، تمرین ۷.۵ و ۷.۶ (مخصوصاً) و کلاً همه‌ی تمرین و تبصره

PAPCO

سؤالات امتحانی

Subject.
Date.

مثال) اگر چند جمله ای رنگی گرافی $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2 > 0$ باید باشد $\chi = ?$

۵ ۲ ۴ ۳

اگر $\lambda=1$ و $\lambda=2$ بشه صفر می‌شه

نکته: کمترین λ ای که $f>0$ ما رو مثبت می‌کنه می‌شود χ = عدد رنگی

اگر $\lambda<2$ باشه چند جمله ای = صفر می‌شود

برای به دست آوردن χ = باید $f>0$ باشد ← کمترین عددی که این $f>0$ می‌کند ۳ است.

مثال: عدد رنگی W_{20} = ?

۱۹ ۱۰ ۹ ۳

کدامیک از این اعداد از همه کمتر است و $f>0$ می‌کند

(صفحه ۱۰۰)

می‌دانیم: $f(W_n,\lambda) = \lambda(\lambda-2)^n + (-1)^n\lambda(\lambda-2)$

$$= \lambda(\lambda-2)^{20} + \lambda(\lambda-2)$$

مثال) کدامیک چند جمله ای رنگی گراف می‌باشد؟

× $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4\lambda$ ⇒ λ^4 چون اول رد می‌کنیم، $m=0$ (طبق نکته ۳)

× $3\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda$ — چند جمله ای رنگی، تکین است، یعنی ضریب λ^n باید ۱ باشد.

× $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda$

✓ $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda$

حال تمامی شرایط رو چک کردیم موند دو گزینه آخر

حال از گزینه سوم شروع می‌کنیم:

تمامی حالت‌هایی که با $n=4$ و $m=3$ می‌توان داشته باشیم را می‌کشیم:

PaPCO

* نکته ۳

Subject.
Date.

۱۲ حالات رنگ می‌توانیم بکشیم

$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)$ ⟵ ریشه‌هاش ۲ و ۱ و ۰

$\lambda^2(\lambda-1)^2$ ⟵ ۱ و ۰

$\lambda(\lambda-1)^3$ ⟵ ۱ و ۰

زمانی دو ترکیب با هم برابرند که ریشه‌هایشان با هم برابر باشد وقتی ① را توی عبارت اصلی می‌گذاری جمله‌ها را صفر می‌کند ⟸ غ است.

$n=4$
$m=0$

$\longrightarrow \lambda^4$

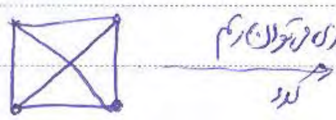
فصل ۸ مسطح‌پذیری

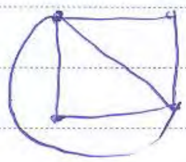
۹ ج

beheshti.neda@aut.ac.ir

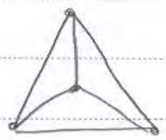
هفت فصل اول فصلی خوب بلد باشیم. عدد رنگی، α و β و وزن و ببینیم.

گراف مسطح: گراف را طوری رسم کنیم که یال‌هایش همدیگر را قطع نکنند.





$\equiv$



K_4 و K_3 مسطح ✓

K_5 مسطح ✗

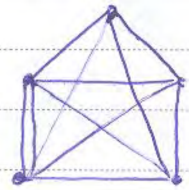
(جاده‌ی) مسطح‌سازی یک گراف یکتا نیست.

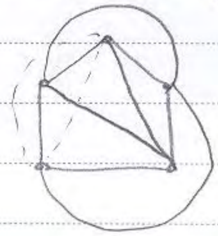
درخت‌ها همه مسطح است ✓

Subject.
Date.

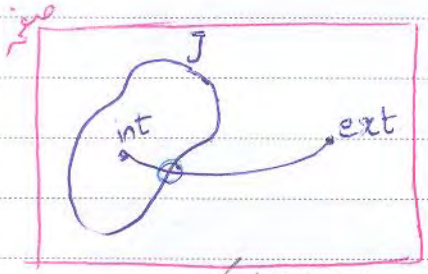
* تعریف: گراف G را مسطح گویند هرگاه بتوان G را طوری رسم کرد که یالها جز در رئوس یکدیگر را قطع نکنند.

مثلاً K_4 و K_3 و تمام درختها مسطح هستند ولی K_5 نه





تعریف خم جردن ؛ منحنی ژردان :



منحنی بسته‌ای را ژوردان گویند اگر هر خطی که یک نقطه را از داخل J (int J) و یک نقطه از خارج J (ext J) را بهم وصل کنیم، حداکثر J را در یک نقطه قطع کند.

یا قطع نمی‌کند یا حداکثر یکی قطع می‌کند ولی چون خم جردن است باید قطع کند.

توجه: منحنی ژردان صفحه را به دو مجموعه افراز می‌کند که یکی کران‌دار (int J) و دیگری بی‌کران (ext J) است.

داخل خم

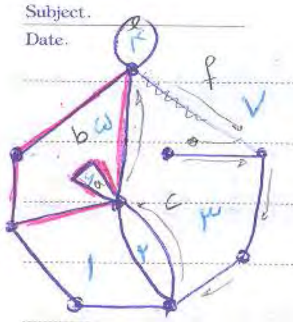
خارج خم

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

صو ۱۸۴ـ دوره‌ی ۸۰۱۰۳

Subject.
Date.



وجه : فقط برای گرافهای مسطح تعریف می‌شود.

خارج هر گراف هم یک وجه است.

تعریف : با قیچی تمامی یالهای این گراف را در بیاوریم به هر تکه، وجه می‌گویند.

۷ وجه داریم

وجه‌های کران‌دار : وجه‌هایی که داخل گراف هستند : ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱

وجه‌های بی‌کران : 〃 〃 خارج 〃 〃 .

نکته) درختها، گرافهای مسطحی هستند که فقط وجه بی‌کران دارند.
〃 〃 〃 وجه داخلی ندارد.
〃 〃 〃 فقط یک وجه دارد.

نکته) هر گراف مسطح دقیقاً یک وجه بی‌کران (وجه خارجی) دارد.

* گرافهای بدیهی و K_2 هم شدیداً مسطح هستند.

درجه وجه : تعداد یالهایی که در هر وجه شرکت کرده‌اند.
از یه رأس شروع می‌کنیم می‌ریم و دوباره به همون جایی که باید برسیم برگردیم

$\overset{\text{وجه } a}{d(a)} = ۳$ $\quad d(f) = ۸$

★ $d(b) = ۷$ $\quad d(e) = ۱$

★ $d(c) = ۷$

هر یال به چند وجه مجاور است؟
حداکثر ۲ تا

Subject.

Date.

* نکته) هر یال حداکثر مجاور به ۲ وجه است به جز (یال برشی) که مجاور یک وجه است.

که در یک وجه هستند

هر رأس آویخته به یال برشی است.

در شمارش درجه وجه‌ها یال‌های برشی ۲ بار محاسبه می‌شود.

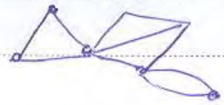
تعریف) یال e را مجاور دو وجه f_1 و f_2 گویند اگر e مرز f_1 و f_2 مشترک باشد.

$$\sum_{f \in \text{وجه}} d(f) = 2\underbrace{m}_{\text{تعداد یال}}$$

ص ۱۸۶ ۸.۱.۵ قضیه

* G مسطح است $\Longleftrightarrow$ تمام بلوک‌ها مسطح باشند.

بزرگترین مولفه همبندی که رأس برشی ندارد.

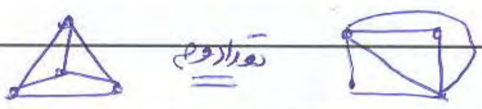


* نکته) اگر G مسطح باشد $\Longrightarrow$ $n-m+\underbrace{l}_{\text{وجه}}=2$

* ص ۱۹۰ - نتیجه ۸.۲.۳

مثال ۸.۲.۴

* اگر گراف را با چند شکل مختلف مسطح سازی کنیم باز هم تعداد وجه‌هاش یکی است.



PaPCO

* اگر G مسطح و حداقل ۳ رأس آنگاه $m \leq 3n-6$

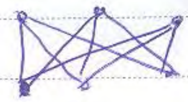
* گراف ساده مسطح باشد آنگاه $\delta \leq 5$

* کمر گراف = طول بزرگترین مسیر   قضیه ۸.۲.۶
مهم و امتحانی

نتیجه ۸.۲.۷
کلاً تمام و ترکیبی از گراف پترسن و برش هم است .

* سر ۱۹۲ تمامی تمرینات مهم و حل ۱۹۴

* $K_{3,3}$ گراف دوبخشی کامل که هر افرازش ۳ راس دارد $|X|=|Y|=3$
مسطح نیستند .



در حقیقت اگر گفت گرافهایی که حداقل یالشان بیشتر از ۶ شد نامسطح است (۱۰

* K_5-e مسطح ✓

$K_{3,3}-e$ مسطح ✓

* K_5-e مسطح است . ✓

K_5-e مسطح است . ✓

$K_{3,3}-e$ مسطح ✓

Subject.
Date.

* K_5 گراف نامسطح با کمترین رأس است.

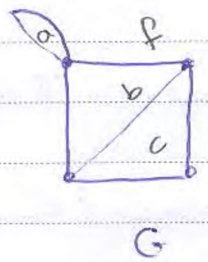
نتیجه که هرگرافی با کمتر از ۵ رأس حتماً مسطح است

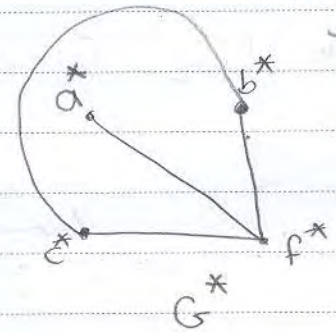
* $K_{3,3}$ گراف نامسطح است با کمترین یال است.

گرافی پیدا نمی‌کنیم تعداد یالهایش کمتر از ۹ باشد و نامسطح باشد، حتماً مسطح است.

* گراف دوگان: G^*

به هر وجه یک رأس در نظر می‌گیریم رأسها زمانی بهم مجاورند که وجه‌ها در گراف G باهم مجاور باشند.
یال مشترک





نکته) ممکن است $H \cong G$ (یکریخت) باشد ولی $H^* \ncong G^*$ نباشد.

* همه چرخ‌ها، همه‌ی دورها، همه درخت‌ها مسطح هستند.

PAPCO

Subject.
Date.

رنگ آمیزی وجهی χ^*

قضیه چهار رنگ: کمترین تعداد رنگ برای رنگ آمیزی سره وجه‌ها لازم است.

هیچ دو وجه مجاور هم رنگ نباشد.

(با حداکثر ۴ رنگ قابل رنگ‌آمیزی است)

* $\chi^*(G) = \chi(G^*)$

G - k رنگ آمیزی وجهی است اگر و تنها اگر G^* - k رنگ آمیزی رأسی باشد.

ص ۲۰۲ - تمرین ۵.۱ قسمت

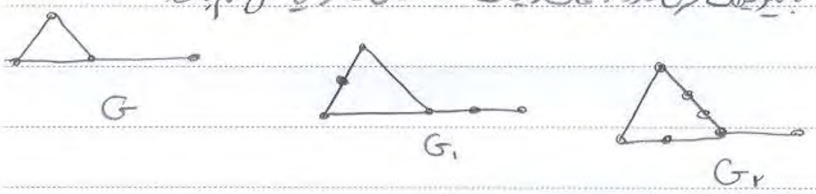
ص ۲۰۵ تمرینها ۵ و ۶

ص ۲۰۳ تمرینها ۴

* **تعریف تقسیم یال:** اگر یال e را با گذاشتن چند رأس تقسیم کنیم یال حاصل را زیرتقسیم یال e گویند.

* **تعریف همان ریخت:** همان ریخت یا زیرتقسیم گراف G، گرافی است که با به کار بردن تعداد متناهی بار، زیرتقسیم یال بدست می‌آید.

با یکریخت فرق دارد: همان ریخت فقط اشکال ظاهری مثل هم باشد



بعد ۲.۵ قضیه ۴ خوانده شود.

Subject.
Date.

نکته) G_1 و G_2 را همان ریخت گویند اگر هردو همان ریخت یک گراف G باشند.

ص ۲۱۲ - قضیه ۸.۱.۵

قضیه: G بدون حلقه مسطح شده با یک دور همیلتنی است، آنگاه:

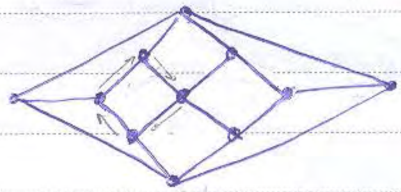
$$\sum_{i=2}^{n}(i-2)(l'_i - l''_i)=0$$

l'_i = تعداد وجه های داخلی G که از درجه i هستند.

l''_i = " " " خارجی " " " " .

i = نشان دهنده درجه وجه

مثال) ثابت کنید گراف هرشل همیلتنی نیست.



گراف هرشل مسطح ✓

۹ وجه دارد
که درجه هر وجه ۴ است.

برای اینکه ببینیم آیا همیلتنی است؟ باید فرمول صدق کند،
که صدق نمیکند

$(4-2)(l'_4 - l''_4)=0$

$2(l'_4 - l''_4)=0$

$l'_4 = l''_4$

زوج $l'_4 + l''_4 = 2l'_4$

$=9$

زوج نیست. ✗

فصل ۹ گرافهای کامل دور فصل ۶ را نگاه کنید

Subject. گراف‌های کامل به گراف‌هایی گفته می‌شود که بطول ۳، ۴، ۵، ... ۱-n داشته باشد
Date.

* گراف‌های مثلثی شده

* گراف‌های کامل تام و اتحادی

در فصل ۹ : $W(G)$ = تعداد خوشه‌های گراف می‌باشد که توی فصل‌های دیگه بهشون می‌گفتند مجموعه‌ای ← عدد خوشه‌ای G (مرتبه یک خوشه ماکسیمم در G)

هر زیر گراف کامل از G را یک خوشه می‌گویند

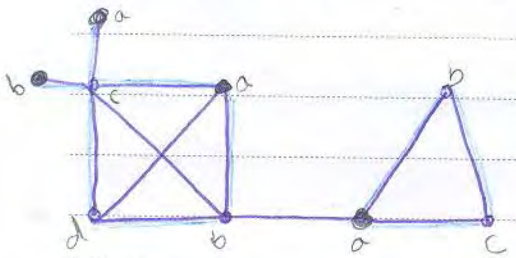
$\chi(G)$ = عدد رنگی

$\alpha(G)$ = عدد استقلال = تعداد اعضای بزرگترین مجموعه از رئوس مستقل ،

$\theta(G)$ = عدد پوشش خوشه‌ای (در فصل ۹)

Min تعداد خوشه در G که مجموعه رئوس G را می‌پوشانند ،

مثال) بگویید چند خوشه دارد؟



تعداد خوشه = تعداد یالها = ۱۲

چهار تا مثلث داخلش و ۱ مربع = ۵

۱ مثلث +

۱۸ خوشه

گراف کامل هست هر راسش ۴ رنگی است .

$\chi(G) = 4$

$\alpha(G) = 4$

$\theta(G) = 4$

$w(G) = 4$ مرتبه‌ی خوشه‌ی ماکسیمم مربع از همه بزرگتره ۴ راس دارد

((چند تا خوشه می‌شود پیدا کرد که تمام رئوس را بپوشاند.)) ← در واقع ما خوشه ماکسیمال پیدا کردیم .

* همیشه $\chi(G)$ با $\alpha(G)$ باهم برابر نیستند زمانیکه باهم برابر باشند می‌شود گراف

۲۳۴

Subject.
Date.

نکته) همیشه در رنگی $\chi(G) \geq \omega(G)$ است.

$\theta(G) \geq \alpha(G)$

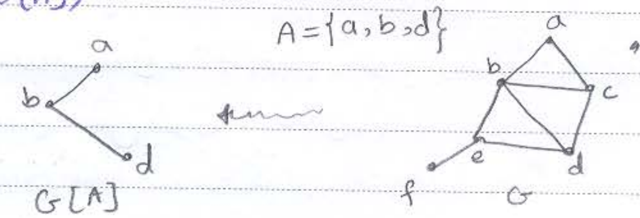
تعریف - فرض کنید G یک گراف ساده باشد آنگاه:

الف) G گراف χ-تام است اگر و تنها اگر به ازای هر $A \subseteq V(G)$ داشته باشیم:

$\chi(\underbrace{G[A]}) = \omega(G[A])$

یک زیرگراف که راسهایش از مجموعه A هستند.

مثلاً $A=\{a,b,d\}$



ب) G گراف α-تام است اگر و تنها اگر به ازای هر $A \subseteq V(G)$ داشته باشیم:

$\alpha(G[A]) = \theta(G[A])$

نکته) گراف G، χ-تام است $\Leftrightarrow$ G^c، α-تام است.

قضیه) گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف) G گراف χ تام است.

ب) G گراف α تام است،

ج) $\forall A \subseteq V(G) \Rightarrow \alpha(G[A])\,\omega(G[A]) \geq |A|$

P4PCO

Subject.
Date.

نکته)

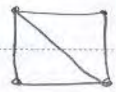
$\chi(G) = \theta(G^c)$

$\alpha(G) = \omega(G^c)$

تعریف گراف های مثلثی شده: گراف ساده G را مثلثی شده گویند، اگر هر دور به طول حداقل ۴ دارای یک وتر باشد. (حداقل ۱ وتر داشته باشد)

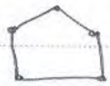
وتر = یک یال از دو رأس نامجاور از یک دور بهم وصل شده باشد را وتر گویند.

C_4 دور به طول ۴

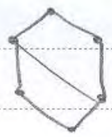


مثلثی شده ✓

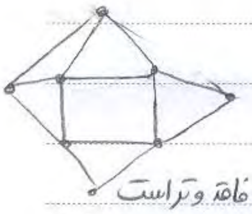
C_5



C_6

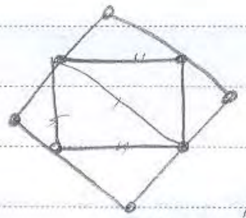


مثلثی شده ✓



C_4 فاقد وتر است
لذا مثلثی شده نمی باشد.

ص ۲۲۵
تم ۹.۲.۸
۹.۲.۹



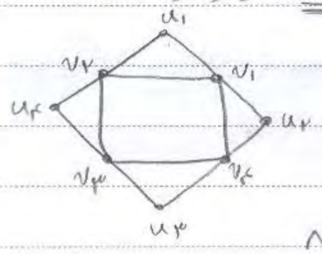
مثلثی شده هست

PAPCO

Subject.
Date.

تعریف رأس سادکی: رأس v را سادکی گویند هرگاه $N(v)$ یک خوشه باشد.

u_1 را در نظر بگیریم سادکی است
چون رأسهای مجاورش را که در نظر بگیریم با خودش میشه یه خوشه.

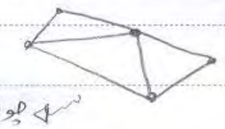


u_1 سادکی ✓

v_1 سادکی ✗

چون: همسایه v_1 $N(v_1)=\{u_1, u_2, v_2, v_4\}$

شکلش



پس چون شکلش کامل نیست (چون خوشه باید کامل باشد) خوشه نیست.
⇐ v_1 سادکی ✗

ص ۲۲۶

قضیه) اگر G مثلثی شده باشد ⇐ شامل رأس سادکی است.

اگر G کامل نباشد ⇐ دارای ۲ رأس سادکی است.

(قضیه) یک گراف مثلثی شده تام است)) امتحانی

تمرین ۳-۲-۷ ، ۳-۲-۸

تعریف گرافهای فاصله ای = یک گراف فاصله ای G عبارت است از اشتراک خانواده از فاصله های از خط حقیقی.
یعنی در این گراف به ازای هر رأس v از G، یک فاصله $J(v)$ از خط حقیقی متناظر

PAPCO

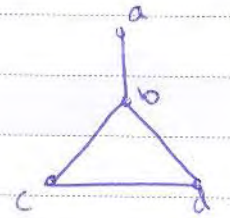
http://www.ab-rafiee.com

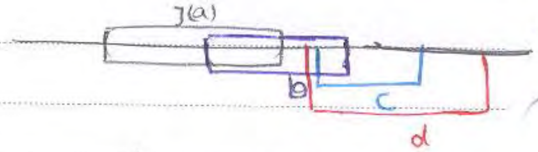
Subject.
Date.

وجود دارد که $uv \in E(G)$ است اگر و تنها اگر $J(u) \cap J(v) \neq \emptyset$

مثال)

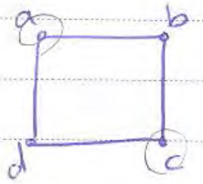
گراف فاصله‌ای

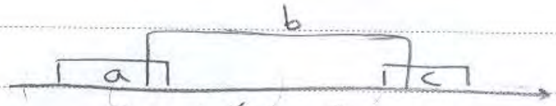




گراف فاصله‌ای G، یکتا نیست

مثال) امتحانی





نمی‌شود رسم کرد، اشتراک ایجاد می‌شود

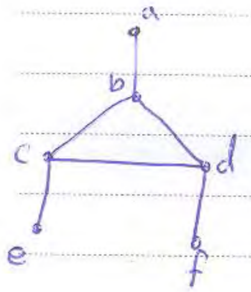
گراف فاصله‌ای نیست X

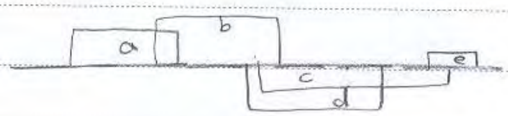
نتیجه: گراف C_4، فاقد گراف فاصله‌ای است

گراف فاصله‌ای است $\Leftrightarrow$ C_4 نداشته باشیم

(ص ۲۲۸ تا قضیه ۹.۳.۴)

همه موارد درس شده





f به دست نمی‌آید ⇐ گراف فاصله‌ای X

ص ۲۲۸ لم ۹.۳.۳ و قضیه ۹.۳.۴

FaPCO

Subject.

Date.

لم ۹.۳.۳ = اگر G فاصله‌ای باشد $\Leftarrow$ G^c دارای جهت دهی متعدی است.

PAPCO