فصل ①

نظریه گراف ها :   دست نوشته استاد : Nike2535.blogfa.com

تعریف گراف :

یک گراف مانند G عبارت است از : سه تایی مرتب :

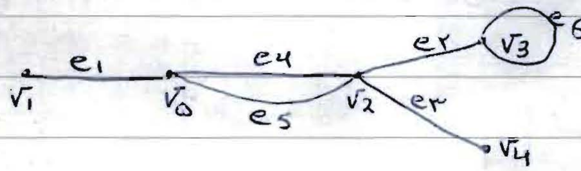
G گراف : $(V(G) , E(G) , I(G))$

که در آن $V(G)$ نشان دهنده گره ها یا رأس های گراف G می باشد.

$E(G)$ نشان دهنده ضلع ها یا یال های گراف G بوده

$I(G)$ نشان دهنده نگاشت از $V(G) \to E(G)$ می باشد.

G : شکل صفحه ۳ - ۱ - ۱ :



مجموعه رئوس $V(G) = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 \}$

مجموعه یال ها : $E(G) = \{ e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6 \}$

$I_G(e_1) = \{ v_1 , v_5 \}$ $I_G(e_5) = \{ v_5 , v_2 \}$

$I_G(e_4) = \{ v_5 , v_2 \}$ $I_G(e_6) = \{ v_3 , v_3 \}$

یال e_1 : یال ساده می باشد (زیرا) ← یال e_2 و e_3 هم ساده می باشند.

یال ساده : فقط دو رأس نامساوی را به هم وصل کرده و هیچ یال دیگری واسط بین دو رأس نیستند.

v_1 و v_5 : دو سر های یال e_1

یال موازی : (چندگانه) : اگر دو رأس یکسان باشند و دو یال آن دو را به هم وصل کرده باشند. (دو رأس مساوی) یال های e_4 , e_5

طوقه : نقطه شروع و پایان یکسان می باشد. مانند یال e_6.

ادامه مثال قبل :

رأس v_1 و v_5 با یکدیگر مجاورند ← توسط یک یال به هم وصل شده اند . یال های مجاور

یال مجاور : یال e_1 مجاور با رأس v_1 و v_5 مجاور می باشند .

رئوس مجاور : یال e_4 و e_5 با رئوس v_5 و v_2 مجاور می باشد و رئوس v_5 و v_2 مجاورند .

رئوس v_2 و v_4 مجاورند و یال e_5 مجاور با رأس v_2 و v_5 می باشد .

رأس v_4 با خودش مجاور است . و یال e_6 مجاور با رأس v_3 است .

رأس v_2 و v_3 با هم مجاورند . چون توسط یال e_2 به هم وصل شده اند .

نکته ۱ : $N(v_5) = \{$ مجموعه همه همسایه های رأس v_5 $\}$

مثال بالا : $N(v_5) = \{v_1, v_2\}$

$N[v_5] = \{$ مجموعه همه همسایه های رأس v_5 با خودش $\}$

نکته اش این است که نباید وقتی پرانتز است خود رأس را بنویسیم .

اگر کروشه بود ، خودش را هم باید بنویسیم .

مثال : $N[v_5] = \{v_2, v_1, v_5\}$

نکته : در این کتاب با گراف های متناهی سروکار داریم ، یعنی گراف هایی که در آن $E(G)$ متناهی و $V(G)$ مجموعه ای متناهی باشد ، که در این صورت می گوییم گراف G متناهی است .

نکته : تعداد اعضای رئوس G را با $n(G)$ نمایش می دهیم $|V(G)| = n(G)$

که به آن مرتبه G می گوییم .

تعداد اعضای مجموعه یال های گراف $E(G)$ را با $m(G)$ نمایش می دهیم و به آن اندازه گراف G گوییم .

$|E(G)| = m(G)$

مثلاً در این گراف : تعداد رئوس = مرتبه گراف G $\quad |V(G)| = n(G) = 5$

تعداد یال های گراف G = اندازه گراف G $\quad |E(G)| = m(G) = 6$

نکته : تعداد یالهایی که از هر رأس خارج می شوند را درجه رأس گویند.

درجه $v_3 = 3$ $\quad$ درجه $v_4 = 1$ $\quad$ درجه $v_2 = 4$ $\quad$ درجه $v_1 = 1$

درجه $v_5 = 3$

درجه طوقه دوبار حساب می شود.

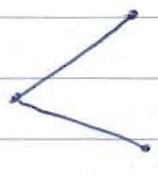
[یا نزولی باشد یا صعودی] $\quad$ دنباله درجه رئوس $= \{1, 1, 3, 3, 4\}$

نکته تستی :

بزرگ ترین درجه رئوس $\quad \Delta(G) = 4$

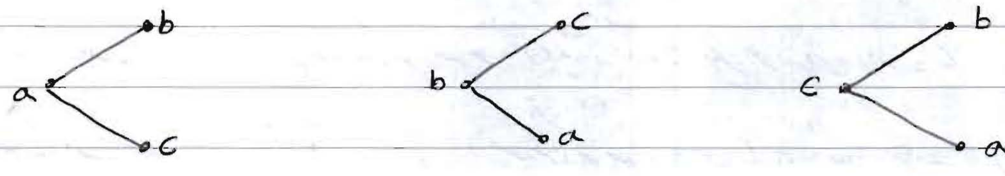
کوچک ترین درجه رئوس $\quad \delta(G) = 1$

- اگر در یک گراف مجموعه رئوس را با حروف نامگذاری نکنیم، گراف بدون برچسب داریم و اگر مجموعه رئوس را با حروف نامگذاری کنیم، گراف برچسب دار خواهیم داشت.

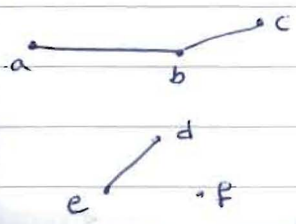


گراف بدون برچسب (G)

حال با چینش ۳ رأس و ۲ یال می توانیم ۳ گراف برچسب دار داشته باشیم.



- اگر در یک گراف نه یال موازی داشته باشیم و نه طوقه، در این صورت گراف را گراف ساده می نامیم.



- رأسی که درجه آن صفر باشد، یعنی هیچ یالی از آن خارج نشده باشد، در این صورت به آن رأس، رأس تنهایی گوییم. (f)

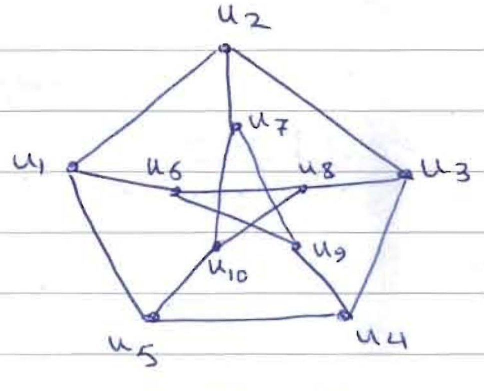
- رأسی که درجه‌اش یک باشد، یعنی فقط یک یال از آن خارج شده باشد به آن رأس آویخته گوییم. (a, c, e, d)

یک ریختی: دو گراف را با یکدیگر یک ریخت نامیم، درصورتی که تعداد رأس‌ها با یکدیگر برابر باشد و تعداد یال‌ها با هم برابر باشد.

و درجه رأس‌های متناظر نیز با هم برابر باشند. در این صورت دو گراف را یک ریخت نامیم.

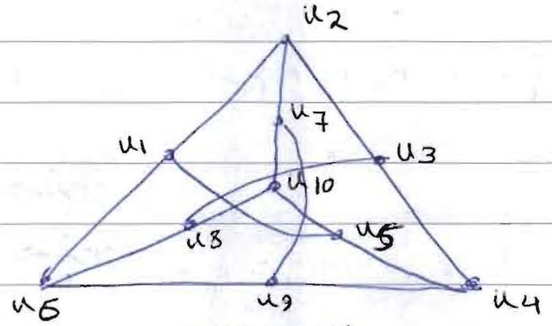
مثال: گراف پترسون

(در امتحان آمده)



$m(G) = 15$

$n(G) = 10$



$m(G) = 15$

$n(G) = 10$

در مورد یک ریختی گراف‌های ساده کمک می‌گیریم. چون در مثال بالا، درجه هر رأس ۳ یال خارج شده است، یعنی درجه‌اش ۳ است، پس نقطه شروع فرقی نمی‌کند.

- فرض کنید یک گراف ساده داریم، درصورتی که درجه هر رأس آن $n-1$ باشد یا به عبارت دیگر هر دو رأس گراف G دو به دو با هم مجاور باشند، در این صورت گراف G را گراف کامل می‌نامیم. درصورتی که تعداد رئوس ما n باشد، گراف کامل را با K_n نمایش می‌دهیم. بدیهی است که دارای n رأس می‌باشیم. پس از محاسبه مشخص می‌شود که تعداد یال‌ها برابر است با ترکیب $\binom{n}{2}$

گراف کامل: ساده و هر دو رأس با هم مجاور باشند

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

K_1 : تنها

a

K_2

K_3

$\frac{3(3-1)}{2} = 3 = n(G)$

نکته: گراف K_1 را که دارای یک رأس تنهاست، گراف بدیهی می‌نامیم. $V(G)=\{a\}$ $E(G)=\Phi$

- در هر گراف ساده، با n رأس، $m(G)$ برابر است با:

$$0 \leq \underbrace{m(G)}_{\text{اندازه}} \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

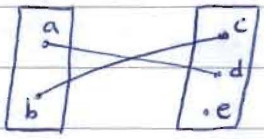
- فرض می‌کنیم G یک گراف ۲ بخشی باشد، که مجموعه رئوس آن توسط دو مجموعه X و Y افراز شده است، در این صورت گراف دوبخشی G را با $G(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و خاصیت افراز بودن را بررسی می‌کنیم.

دو مجموعه X و Y یک افراز برای مجموعه رئوس $V(G)$ خواهند بود در صورتی که:

$V(G)$ توسط X و Y افراز شده است. $X \cup Y = V(G)$ ، $X \cap Y = \Phi$ ، $X = \Phi$ ، $Y = \Phi$

می‌توان گراف دوبخشی $G(X,Y)$ را رسم کرد، که در آن مجموعه رئوس V به دو دسته X و Y تقسیم شده اند، و در آن نقطه شروع و پایان هر یال ~~[illegible]~~ متعلق است.

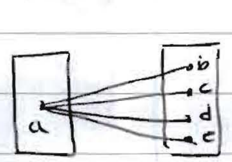
$V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ $X=\{a,b\}$ $Y=\{c,d,e\}$

X  $G(X,Y)$ یال حتماً یک سرش در X یا سر دیگری در Y

- اگر همه رئوس مجموعه X با همه رئوس مجموعه Y مجاور باشند، در این صورت خواهیم داشت: گراف $K_{p,q}$

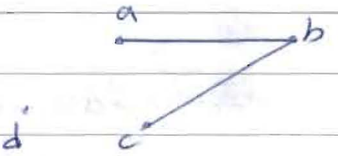
X  Y $K_{2,3}$ گراف دوبخشی کامل:

در صورتی که در گراف ۲ بخشی کامل $K_{p,q}$ ، $p=1$ در این صورت به این گراف، گراف ستاره گویند.

$K_{p,q} \xrightarrow{p=1} K_{1,q}$  $K_{1,4}$ دوبخشی کامل

X ستاره Y

G



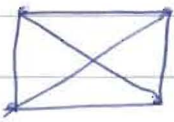
* گراف ساده : نه طوقه دارد نه یال موازی

* راسی که درجه یک دارد، راس آویخته گویند

* یالی که دارای یک راس با درجه یک باشد، یال آویخته گویند.

* گراف کامل: گراف ساده G که هر دو راس آن با هم مجاور باشند را گراف کامل نامیم. گراف کامل حتما ساده است.

K_n : n مقدار رئوس



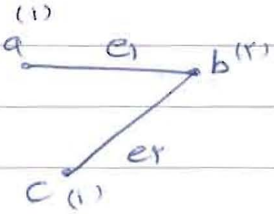
K_4 گراف کامل

* اگر طوقه یا یال موازی داشته باشد کامل نیست.

* گراف ساده G را در نظر بگیریم.

* گراف مکمل:

G



بیشترین درجه رئوس

$$\begin{cases} \Delta(G) = 2 \\ \delta(G) = 1 \end{cases}$$

کمترین درجه راسها

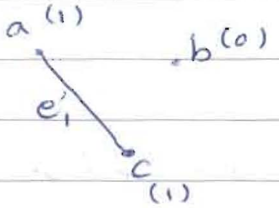
$V(G) = \{a, b, c\}$

$E(G) = \{e_1, e_2\}$

شکل

$\Downarrow$

G^c



$V(G^c) = V(G) = \{a, b, c\}$

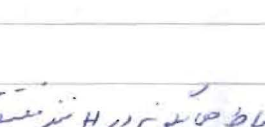
$E(G^c) = (E(G))^c = \{e_1'\}$

$$\begin{cases} \Delta(G^c) = 1 \\ \delta(G^c) = 0 \end{cases}$$

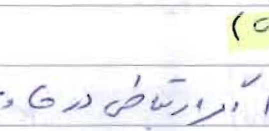
* زیرگراف القائی : (یال القائی)

به ازای هر دو گره موجود در H اگر ارتباطی در G وجود داشته باشد، این ارتباط‌ها عیناً در H نیز منتقل می‌شود.

G



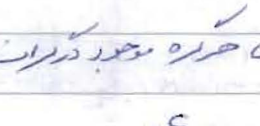
H



* زیرگراف کامل : به ازای هر گره موجود در گراف H هر دو گره با هم مجاورند.

G

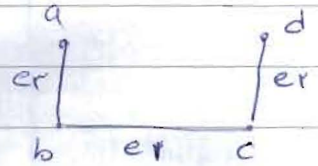
H :



زیرگراف کامل نیست

چون خود H کامل نیست

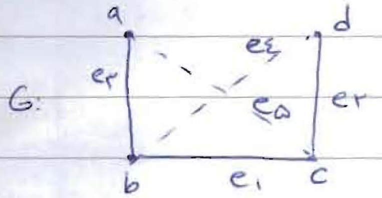
- بین دو مهره اگر در G یالی بود در H نیز یال می‌کشیم.



زیرگراف کامل $K_2 = H$

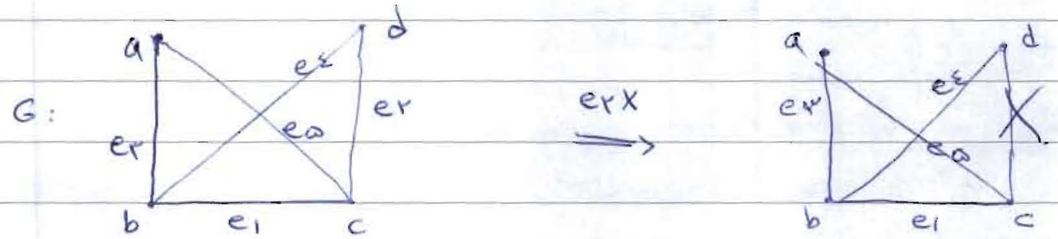
- خوشه ماکسیمال: خوشه‌ای که زیرمجموعه هیچ خوشه دیگر نیست. (K_2 = خوشه ماکسیمال) $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$

- مثبت کردن یال‌ها (اضافه کردن):



$$G + bd + ac = G + e_5 + e_4$$

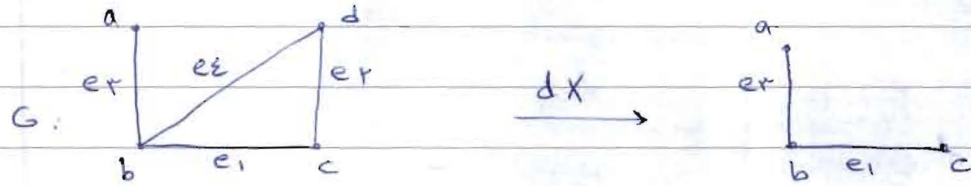
- کم کردن یال e:



$G - e_1$

$G - e_2$

کم کردن / حذف مهره:



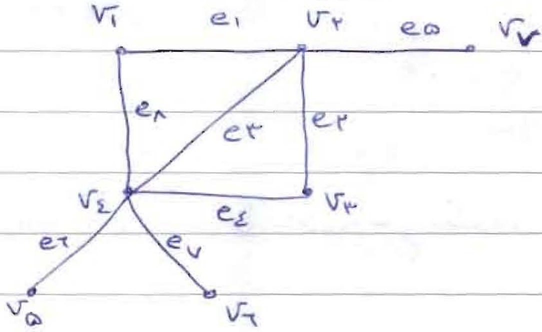
$G - v_1$

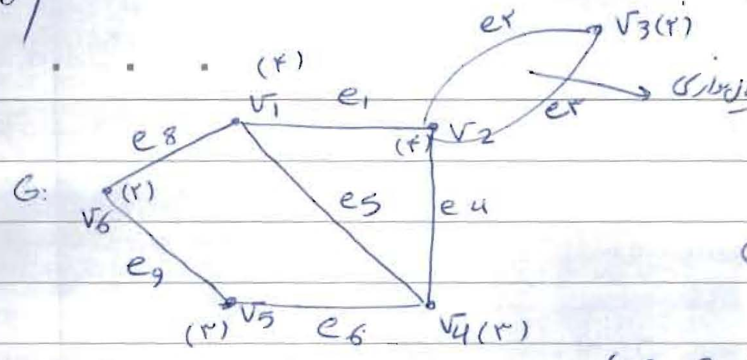
$G - d$

یال‌های e_2 ، e_4 نیز پاک می‌شوند.

مثال : ص ۱۰ مثال ۳ :

زیرگراف G





درجه رأس ها:

درجه هر رأس برابر با تعداد یال های خروجی هر رأس

دنباله درجه رئوس : $\{2, 2, 3, 3, 4, 4\}$

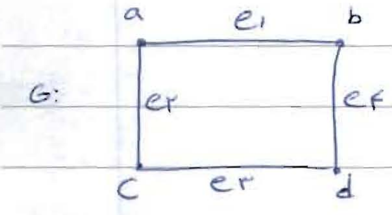
$$\begin{cases} \Delta(G) = 4 \\ \delta(G) = 2 \end{cases}$$

چون یال موازی دارد : گراف چندگانه

گراف G را ~~-~~ K منتظم نامیم، هرگاه درجه هر رأس عدد صحیح غیرمنفی K باشد.

مثلاً اگر درجه هر رأس عدد صحیح $K=3$ باشد گراف G را ۳ منتظم یا مکعب می‌نامیم. ۵ در آن $d_G(v_i) = K = 3$ است.

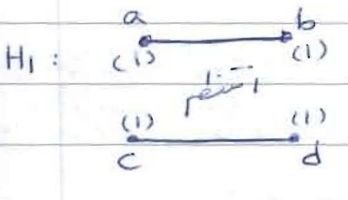
گراف G را در نظر می‌گیریم.

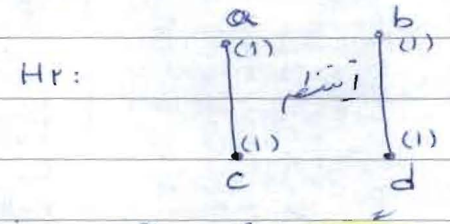


$V(G) = \{a, b, c, d\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

در این صورت تنها دو زیرگراف فراگیر ۱ منتظم از گراف G استخراج می‌شود.





زیرگراف فراگیر : تمامی تماس رئوس منتقل می‌شود به زیرگراف.

چون ۱ منتظم هستند و فراگیر هستند به آنها ~~[illegible]~~ جورسازی کامل گویند.

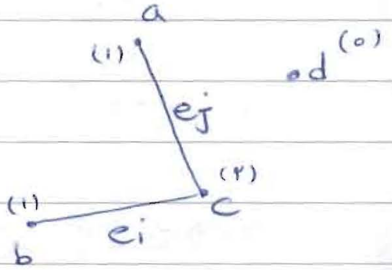
زیرگراف G را جورسازی کامل یا یک عامل نامیم، هرگاه ۱ منتظم فراگیر باشد. مانند H_1، H_2

نکته : رأس v_i را ~~[illegible]~~ در گراف G را تنها نامیم، اگر $d_G(v_i) = 0$

نکته : " " " " G را آویخته نامیم اگر $d_G(v_i) = 1$

یال e_i در گراف G را آویخته نامیم، هرگاه حداقل یک سر آن یک رأس که این یال از آن خارج شده باشد و درجه آن رأس یک باشد.

مثال صفحه بعد



a : رأس آویخته

b : آویخته

e_i : یال آویخته

e_j : -

d : رأس تنها

نکته: قضیه اویلر: در هر گراف G، مجموع درجه رئوس برابر است با ۲ برابر تعداد یالهای G.

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2 m_G$$

m = اندازه

n = مرتبه

مثال گراف صفحه قبل:

رئوس: $\{2, 2, 3, 3, 4, 4\}$

$m(G) = |E(G)| = 9$ تعداد یالها = اندازه گراف G

$|V(G)| = n(G) = 6$ مرتبه گراف

$\sum d_G(v_i) = 2+2+3+3+4+4 = \underline{\underline{18}}$ = $2 \times$ تعداد یالها $= 2 \times 9 = \underline{\underline{18}}$

نکته: نتیجه قضیه اویلر:

در هر گراف، تعداد رأس ها با درجه فرد، عددی زوج است.

مثال: در گراف مثال قبل، ملاحظه می شود که تعداد رأس ها با درجه فرد ۲ است که عددی است زوج.

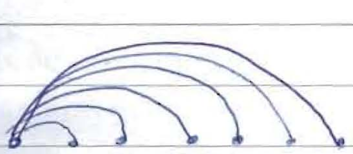
تعریف: دنباله $(d_1, \ldots, d_n)$ از اعداد صحیح غیرمنفی را یک دنباله گرافیکی نامیم، هرگاه بتوان یک گراف ساده به ازای آن دنباله رسم نمود.

مثال: ملاحظه می شود که این دنباله را نمی توان با ۷ رأس رسم نمود $(7, 6, 3, 3, 1, 1, 1)$

در ازای هر رأس a، چون طبق تعریف باید گراف ساده باشد، تنها یک یال از رأس a به باقی رئوس می توان رسم کرد. پس درجه هر رأس حداکثر عدد ۶ است و عدد ۷ درجه هیچ رأسی از این گراف ساده نخواهد بود. بنابراین چون در این دنباله $d_1 = 7$ است، این دنباله گرافیکی نیست.

۶۱

و به ازای آن، گراف ستاره رسم کنید. شکل مثال ۱-۳-۸)



مسیرها و مفهوم همبندی ها :

دنباله متناوب $v_i e_j v_k e_t v_q e_g v_p e_n v_s e_l v_h$ که دنباله‌ای از رئوس و یالهای متوالی باشند و نقطه شروع و پایان آن نیز رئوس می‌باشد را یک گشت می‌نامیم و اگر در آن اگر $v_1 = v_h$ باشد این گشت را یک گشت بسته خواهد بود. مثال قبل :

$v_5 e_6 v_4 e_4 v_2 e_1 v_1 e_7 v_5$

که گشت بسته است که یک دنباله متوالی از رئوس و یال هاست.

* یک گشت که دنباله‌ای از رئوس و یالهاست، دارای طول n است، هرگاه در داخل گشت n یال وجود داشته باشد، مثلاً در مثال اخیر این گشت بسته دارای طول ۴ است. چون ۴ یال در داخل این گشت وجود دارد.

* یک گشت را یک گذر نامیم، هرگاه هیچ یال تکراری نداشته باشد. مانند گشت روبرو: $v_1 e_5 v_4 e_4 v_2 e_3 v_3$

* یک گشت را یک مسیر است هرگاه دارای رئوس تکراری نباشد، مانند $v_4 e_4 v_2 e_1 v_1 e_8 v_6$

* هر مسیر یک گذر است، ولی عکس آن همواره برقرار نیست.

* یک مسیر بسته را یک دور نامیم. مانند: $v_4 e_3 v_2 e_1 v_1 e_5 v_4$

* یک دور به طول n را با C_n نمایش می‌دهیم، مثلاً مسیر زیر یک دور به طول ۲ می‌باشد $v_2 e_3 v_3 e_2 v_2$ که با یالها نشان دهنده C_2 است.

* یک مسیر روی n رأس را با P_n نمایش می‌دهیم، مثلاً $v_6 e_8 v_1 e_1 v_2$ یک P_3 است. (مسیر روی سه رأس)

* فرض کنید دو رأس v_i و v_j را متصل نامیم، هرگاه یک $v_i - v_j$ مسیر از v_i به v_j وجود داشته باشد.

مثلاً در این شکل $v_5 - v_3$ که $v_5 e_6 v_4 e_4 v_2 e_3 v_3$ مسیر است لذا هرگاه متصل بین هر دو رأس

موجود در گراف G بتوان یک مسیر رسم کرد، در این صورت گراف G را همبند نامیم، پس گراف همبند G بین هر دو راس حتماً یک مسیر وجود دارد.

مثال ۲-۴-۱ :

$v_5\, e_7\, v_1\, e_1\, v_2\, e_4\, v_4\, e_5\, v_1\, e_7\, v_5\, e_9\, v_6$

گشت به طول ۶ است.

چون یال e_7 در داخل گشت تکرار شده است، پس این گشت گذر نیست. پس مسیر نیست.

مثال :

$v_1\, v_2\, v_4\, v_5\, v_6\, v_1$

یک گشت به طول ۵ است. چون این گشت هیچ راس تکراری ندارد، پس مسیر است. و چون این گشت بسته است، پس این مسیر بسته است، پس دور است. به طول ۵ که آن را C_5 نوشتیم.

Subject: گراف

Year. Month. Date. (۹)

الف) یک مسیر روی n گره را با P_n نمایش می‌دهیم

ب) $v_2 e_1 v_1 e_8 v_6$ یک P_3 است (مسیر ۳ گره)

ت) فرض شود دو گره v_i و v_j را متصل نامیم هرگاه یک $v_i - v_j$ مسیر از v_i به v_j وجود داشته باشد

ب) $v_3 e_3 v_2 e_4 v_4 e_6 v_5$ یک $v_3 - v_5$ مسیر است بنابراین هرگاه بتوان بین هر دو گره

موجود در گراف G یک مسیر پیدا کرد بنابراین گراف G را همبند گوییم پس در گراف همبند

بین هر دو گره حتماً یک مسیر وجود دارد

~~...~~

ب) ۲-۴-۱ : $v_5 e_7 v_1 e_1 v_2 e_4 v_4 e_5 v_1 e_9 v_7 v_5 e_9 v_6$

گشت به طول ۶ است

چون یال e_1 در گشت تکرار نشده است پس این گشت گذر نیست پس مسیر نیست

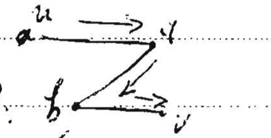
$v_1 / v_2 / v_4 / v_5 / v_6 / v_1$ یک گشت به طول ۵ است

چون این گشت هیچ گره تکراری ندارد پس مسیر است و چون این گشت بسته است پس این مسیر

بسته است پس دور است به طول ۵ که به آن C_5 گوییم

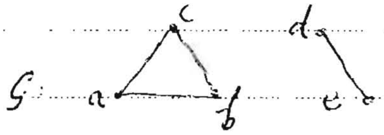
فرض شود به ازای هر دو گره دلخواه u و v در گراف G یک مسیر از u به v وجود دارد بنابراین می‌گوییم ~~گراف همبند است~~

هر دو گره u و v به هم متصل اند و گراف G همبند است و مولفه همبندی گراف G که با ω_G نمایش می‌دهیم



$\omega_G = 1$

اگر گراف G همبند نباشد بنابراین مولفه همبندی $\omega_G \neq 1$ می‌باشد یعنی بیش از یک مولفه همبندی با گراف‌های ناهمبند بررسی می‌کنیم

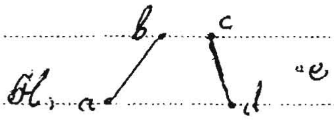


دیده می‌شود که نمی‌توان از گره c به گره e هیچ مسیری وجود ندارد بنابراین

دو گره c و e متصل نیستند پس بنابر تعریف گراف G ناهمبند است $\omega_G \neq 1$

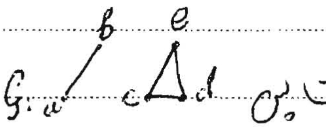
Subject: گراف
Year. Month. Date. (10)

در گراف H:



دیده می‌شود که از گره b به گره d مسیری نداریم
بنابراین گراف H ناهمبند است بنابراین گراف H ناهمبند است
در گراف H ۳ زیرگراف همبند به شکل a—b و c—d و e وجود دارد که خودشان به تنهایی همبند هستند پس مولفه همبند در گراف H برابر است با: $\omega_H = 3$

در گراف G:



دیده می‌شود که بین دو گره b,d هیچ مسیری وجود ندارد پس این دو گره ناهمبند است پس G ناهمبند است $\omega_G \neq 1$

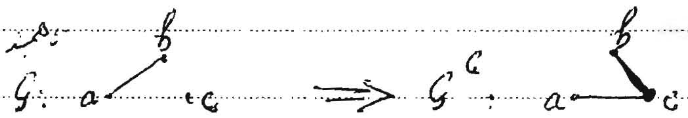
تعریف: $d(u,v)$ = طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v که در آن u,v دو گره دلخواه هستند

$d(c,d)=1$; $d(b,d)=\infty$; $d(c,e)=1$; $d(e,c)=1$; $d(a,b)=1$

نکته: اگر دو گره در زیرگراف جدا از هم وجود داشته باشند طول دو گره برای آن دو برابر است با بی‌نهایت
این در صورتی است که دو گره در دو زیرگراف مجزا یا جدا وجود داشته باشد
مثلاً چون a,c در دو زیرگراف همبند جدا وجود دارند $\Leftarrow d(a,c)=\infty$

نکته: اگر گراف G ناهمبند باشد آنگاه گراف G^c همبند است
مکمل

مثال:



$\omega_G = 2$

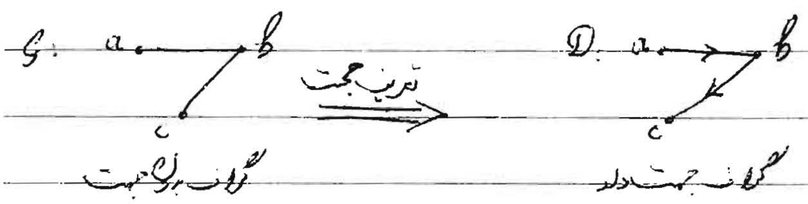
نکته: دیده می‌شود که بین هر دو گره در گراف G^c یک مسیر وجود دارد پس G^c همبند است بنابراین $\omega_{(G^c)} = 1$
به طور کلی به ازای هر گراف ناهمبند G یک گراف همبند G^c حاصل می‌شود

هر گراف می‌تواند دارای یک گراف خودمکمل باشد. گراف G را گراف همانی می‌نامیم اگر و تنها اگر با مکملش یکریخت باشد و هیچ گراف دیگری وجود نداشته باشد که با گراف G یکریخت باشد بنابراین گراف G را همانی نامیم

فصل ۲

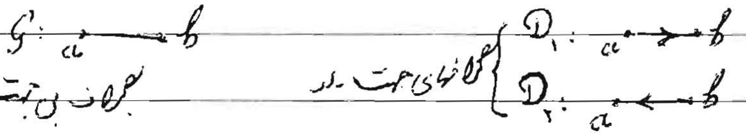
گراف جهت دار :

در گراف G اگر به هر یال جهتی تعریف کنیم بنابراین گراف به دست آمده گراف جهت دار نام دارد که آن را دیگراف می‌نامیم و با D نمایش می‌دهیم



به ازای یال جهت دار $\overrightarrow{ab}$ گره a دم یال و گره b سر یال $\overrightarrow{ab}$ می‌نامیم

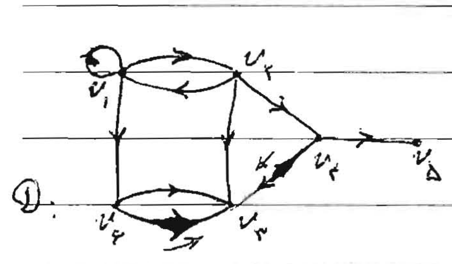
در گراف G می‌توان روی یال‌ها دو جهت جداگانه تعریف نمود که به ازای یک جهت روی یال‌ها می‌گویند



به همین دلیل می‌توان D گراف‌های گوناگون کشید

در گراف جهت دار D تعریف می‌کنیم : $d^+_D(v)$ = شمار / تعداد یال‌هایی که از گره v خارج می‌گردند
$d^-_D(v)$ = " " " " v داخل می‌گردند

اگر گره v دارای یک حلقه باشد $d^-_D(v) = 1 + d^+_D(v)$ است ؛ یک یال از v خارج و یک یال به v داخل گردیده است



ورودی خروجی

$d^+(v_1) = 3$; $d^-(v_1) = 2$

$d^+(v_2) = 3$; $d^-(v_2) = 1$

$d^+(v_3)$; $d^-(v_3) = 4$

اگر از تمام یال‌های جهت دار D جهت‌ها را حذف کنیم آنگاه گرافی بدون جهت داریم که به آن گراف زمینه می‌گوییم

در گراف جهت دار D داریم :

به ازای هر گراف جهت دار D : $\sum d^+(v_i) = \sum d^-(v_i) = m(D)$ = شمار یال‌های گراف جهت دار (D)

مجموع درجه‌های خروجی = مجموع درجه‌های ورودی

Subject: گراف
Year .... Month .... Date ....۱۲....

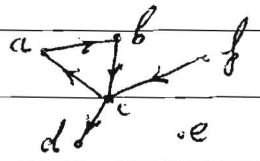
مثال) ~~[illegible]~~ ~~$\sum d^+(v_i)$~~ درجه‌ها را جمع و ببینیم

$n = 6 =$ مرتبه گراف

تعداد یال‌های گراف جهت‌دار $D = \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = d^+(v_1)+d^+(v_2)+\dots+d^+(v_6) = 3+3+0+2+0+2 = 10$

$\sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = d^-(v_1)+d^-(v_2)+\dots+d^-(v_6) = 2+1+4+1+1+1 = 10$

مثال) D:



نکته: در گراف D رأس با درجه صفر را رأس تنها گوییم
و رأس با درجه ۱ را رأس آویخته داریم

$d^+(e)=0=d^-(e) \Rightarrow$ گره تنها

$d^+(d)=0 \; ; \; d^-(d)=1 \Rightarrow$ گره آویخته

$d^+(f)=1 \; ; \; d^-(f)=0 \Rightarrow$ گره آویخته

هر گراف D را در نظر می‌گیریم به صورت $D=(V,A,L)$ که

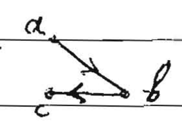
V: مجموعه گره‌ها
A: مجموعه یال‌های جهت‌دار
L: نگاشتی از A به V

زیرگراف D' را زیرگراف D نامیم هرگاه ($D' \subseteq D$):

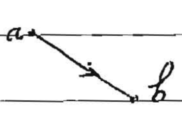
۱) D' جهت‌دار باشد
۲) $V(D') \subseteq V(D)$ && $A(D') \subseteq A(D)$
۳) $L: A(D') \to V(D')$ باشد که در آن $V(D')$: مجموعه گره‌های D' و $A(D')$: مجموعه یال‌های D'

&

D:



D':



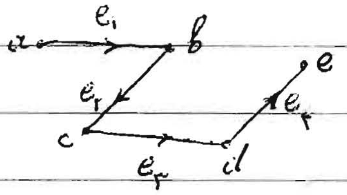
در گراف جهت‌دار D یک گشت جهت‌دار عبارت است از یک دنباله متوالی از گره‌ها و یال‌های جهت‌دار که این دنباله از یک گره آغاز و به یک گره دیگر پایان می‌یابد

Sadat

۷

Subject: گراف
Year .... Month .... Date ۱۲

ت:



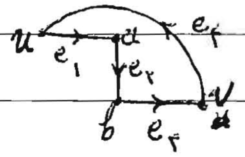
D: یک گشت جهت‌دار به طول ۲ $w: a e_1 b e_2 c$

ت) یک گشت جهت‌دار که در آن گره‌ها تکراری نباشند را یک مسیر جهت‌دار نامیم مانند مسیر جهت‌دار $a\vec{e_1}b\vec{e_2}c$ یا $c\vec{e_3}d$.

ت) گره v را قابل دسترس از u نامیم هرگاه مسیری جهت‌دار از u به v وجود داشته باشد
مانند مثال بالا گره d قابل دسترس از گره a است چون مسیر جهت‌دار $a\vec{e_1}b\vec{e_2}c\vec{e_3}d$ در گراف جهت‌دار D می‌باشد (وجود دارد)

دو گره گراف D را دی همبند نامیم هرگاه هر کدام از گره‌ها قابل دسترس از دیگری باشد

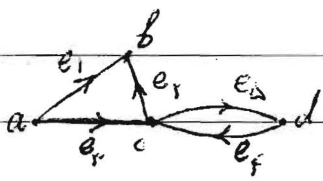
ت) گره‌های u و v را دی همبند نامیم هرگاه هر گره از دیگری قابل دسترس باشد به عبارت دیگر یک مسیر جهت‌دار از u به v و مسیر جهت‌دار دیگر از v به u در D وجود داشته باشد



مانند در دی گراف D: $v\vec{e_4}u$ و $v\vec{e_1}a\vec{e_2}b\vec{e_3}u$ ⇐ u, v دی همبند هستند

ت) دی گراف D را دی همبند نامیم اگر هر دو گره دلخواه u و v در D، دی همبند باشند، هر گره قابل دسترس از دیگری باشد

ت:



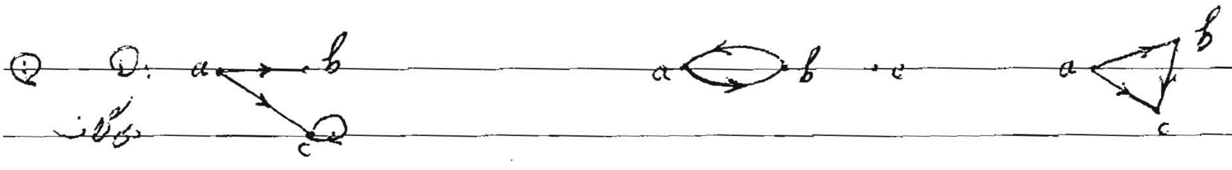
a و d دی همبندند: یکی از دیگری قابل دسترس است

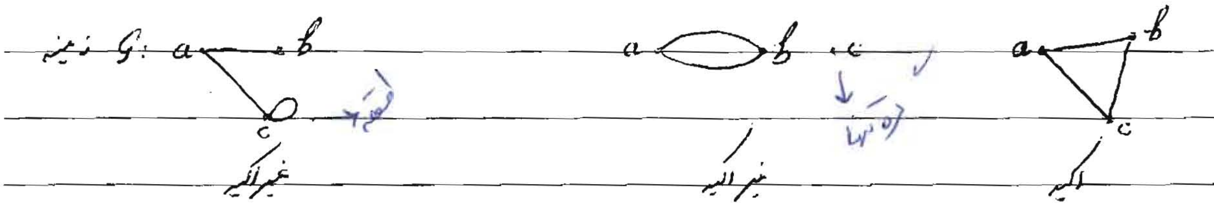
ت) یک دی گراف را دی همبند نامیم اگر هر دو گره آن دی همبند باشند، هر کدام از دیگری قابل دسترس باشد
دی گراف دی همبند D را دی گراف قوی یا قویاً همبند نامیم
دی گراف D را اکید نامیم هنگامی که گراف زمینه آن ساده باشد
D: ...

Sadat

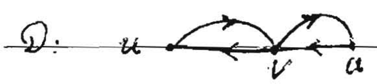
ساده: نه چندگانه و نه طوقه داشته باشد.
از جهت‌ها کار نداریم

Subject: گراف
Year .... Month .... Date ۱۴



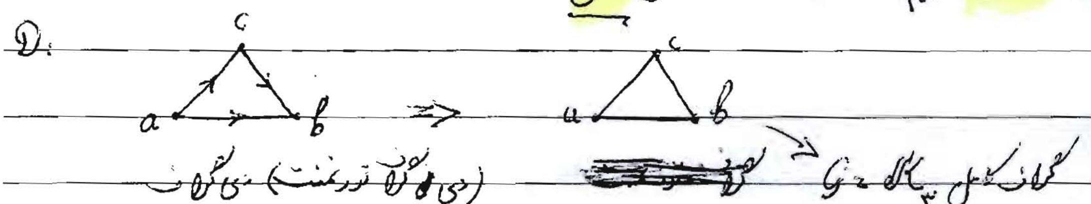


دی‌گراف D را متقارن نامیم هرگاه به ازای هر دو گره u و v وجود داشته باشد کمان‌های / یال‌های $\overrightarrow{uv}$ و $\overrightarrow{vu}$ در این گراف



$\overrightarrow{uv} \Rightarrow \overrightarrow{vu}$
$\overrightarrow{va} \Rightarrow \overrightarrow{av}$ } $\Rightarrow$ گراف متقارن است

دی‌گراف D را یک تورنمنت گوییم هرگاه گراف زمینه آن کامل باشد

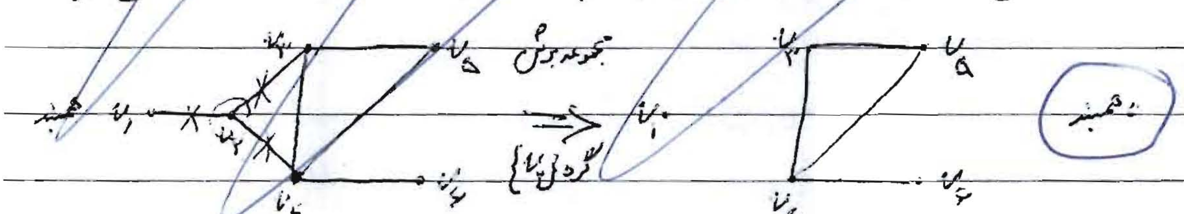


فصل ۳) همبندی

برش رأسی / گره‌ای:

یک زیر مجموعه V' از سرگره‌های $V(G)$ در گراف همبند G را برش گره / راسی می‌نامیم هرگاه $G-V'$ ناهمبند باشد آن را برش تک گره / راسی می‌نامیم

هرگاه به تعداد اعضای $V' = K$ باشد $K = |V'|$ ، V' را مجموعه جداساز از گره‌های G می‌نامیم



Sadat

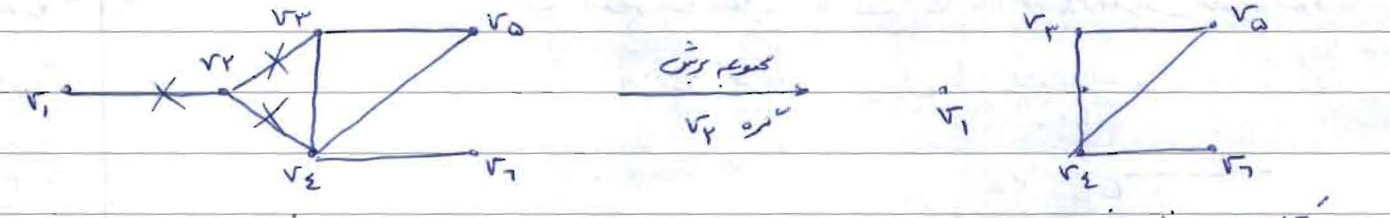
(۸)

فصل ۳ : همبندی

برش راسی / گره ای :

یک زیر مجموعه V' از مجموعه گره های $V(G)$ در گراف همبند G را برش گره ای می نامیم، هرگاه $G-V'$ ناهمبند باشد و آنرا برش K گره ای / راسی می نامیم.

- هرگاه به مقدار اعضای $K=V'$ باشد، $|V'|=K$ ، V' را مجموعه جداساز از گره های G می نامیم.

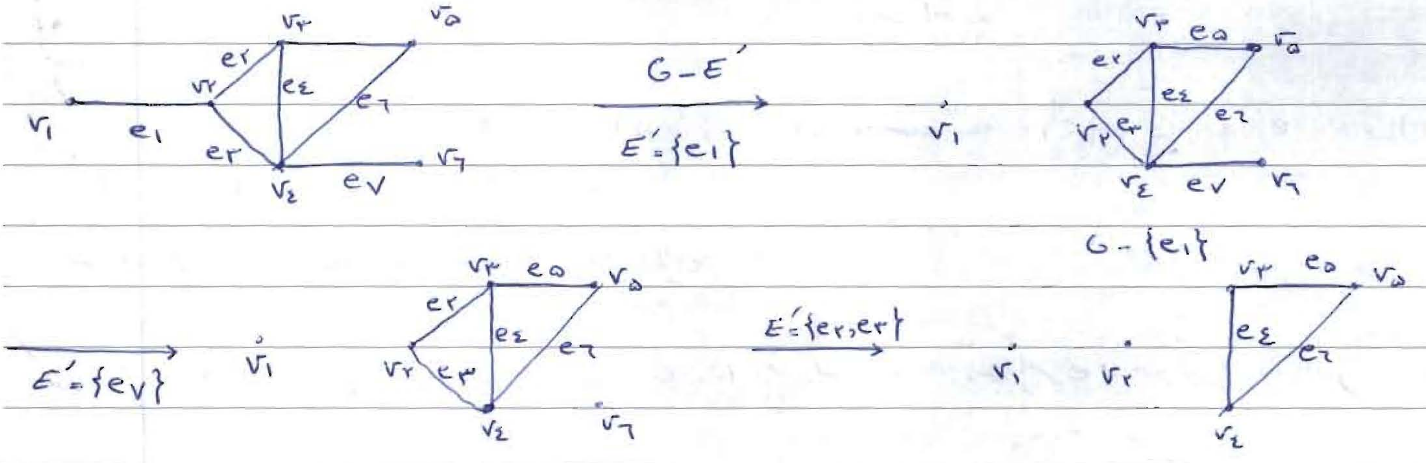


همبند — ناهمبند $G-V'$

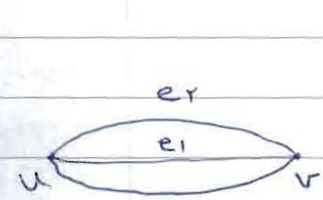
~~...~~ V — $V-\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

برش یالی :

یک زیر مجموعه E' از یالهای $E(G)$ در گراف همبند G را برش یالی می نامیم هرگاه $G-E'$ ناهمبند باشد و آنرا برش K یالی گویند. هرگاه شمار اعضای E' برابر K باشد $|E'|=K$ را مجموعه جداساز از یالهای G می نامیم.



تبصره ۳-۱-۲ : اگر uv یک یال از برش یالی E' باشد، آنگاه همه یالهایی که u و v گره های پایانی آنها هستند نیز به E' تعلق دارند. یعنی یالهای موازی با uv نیز هم عضو E' هستند.



$(\exists E' : G-E')$ & $(e_1 \in E'$; e_1 یالهای موازی $\rightarrow e' \in E')$

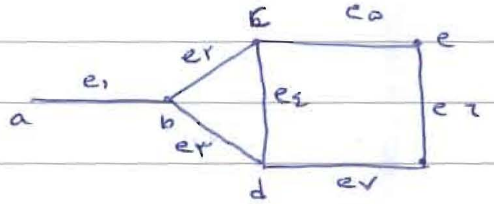
مجموعه جداساز — گراف ناهمبند — $e' \parallel e_1$

G : همبند است.

نکته: هیچ حلقه‌ای به برش یالی تعلق ندارد. $\forall e$: اگر e حلقه باشد $\longrightarrow e \notin E'$

نکته: اگر e حلقه باشد، بنابراین e متعلق به هیچ مجموعه یالی نیست. همچنین e به تنهایی مجموعه برش یالی را تشکیل نمی‌دهد، به طور کلی e هرگز متعلق به برش یالی نیست.

قضیه ۳-۱-۴: اگر G همبند باشد و E' یک مجموعه از یالهایی که حذف آن به ناهمبندی گراف منجر می‌شود، آنگاه E' شامل یک برش یالی از G است. بدیهی است که اگر e یک یال موثر از گراف همبند G باشد، آنگاه $G-e$ دقیقا دو مؤلفه دارد.



گراف ناهمبند $G-E'$

$E'=\{e_2,e_3,e_4\}$

$E''=\{e_2,e_3\}$

$E'' \subseteq E'$

- یال e_1 را که $G-\{e_1\}$ را یک گراف ناهمبند از یک یال برشی می‌گوییم.

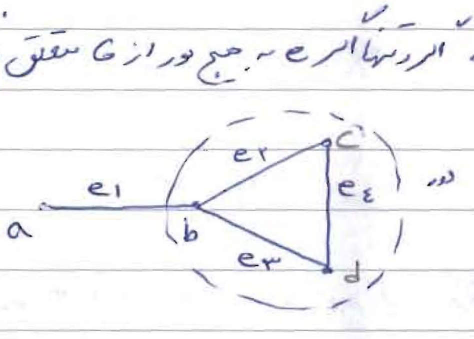
یال برشی $e_1 \Longleftrightarrow G-\{e_1\} \Longrightarrow \omega(G-\{e_1\})=2$

گراف ناهمبند

مثال: e_1 ؛ $G-\{e_1\}$ = گراف ناهمبند ; $\omega(G-\{e_1\})=2$

- یک یال برشی $\Longleftrightarrow$ یک مجموعه برش‌های یالی

نکته ۳-۱-۷: یک یال $e=xy$ از گراف G، یال برشی است، اگر و تنها اگر e به هیچ دور از G متعلق نباشد.



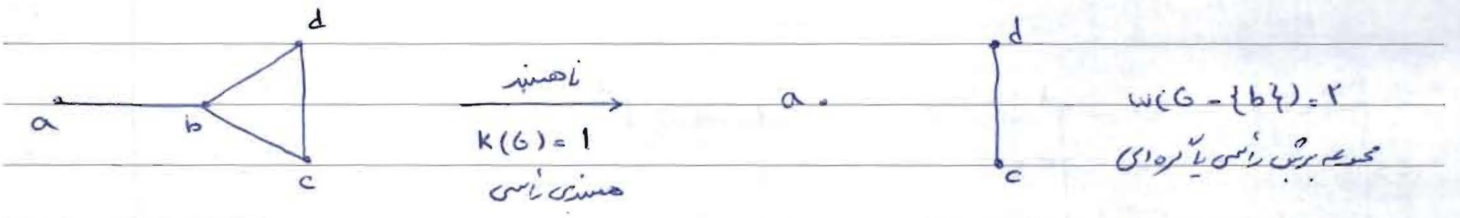
در این شکل دیده می‌شود که یال e_1 برشی است چون $G-\{e_1\}$ گراف ناهمبند است، بنابراین e_1 به هیچ دوری از گراف G مانند $b e_2 c e_4 d e_3 b$ متعلق نیست. برعکس هیچ یک از یالهای موجود در یک دور، یک یال برشی نیست.

گراف نابدیهی : گرافی که بیش از یک یال دارد.

گراف بدیهی : گرافی که فقط یک یال دارد.

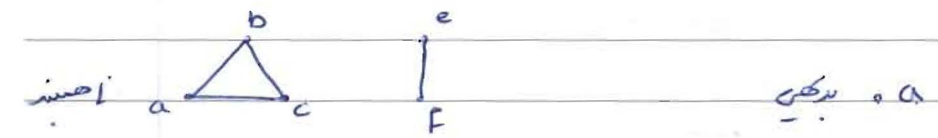
همبندی گره‌ای / راسی :

برای گراف نابدیهی و همبند G که حداقل دو راس ناجاور داشته باشد، مینیمم مقدار k را به طوری که یک برش k - راسی وجود داشته باشد را همبندی راسی گوییم.

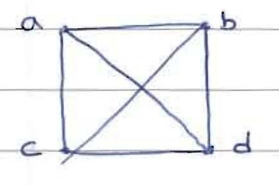


از مجموعه تکانی $\{v_i\}$ به گونه‌ای که $G - \{v_i\}$ ناهمبند است.

نکته : اگر گراف ناهمبند یا بدیهی باشد، $K(G) = 0$. همبندی راسی یا گره‌ای $\omega(G) = 2$ گراف ناهمبندی.



- اگر زیرگراف ~~کامل~~ گراف کامل باشد. $K(G) = n - 1$

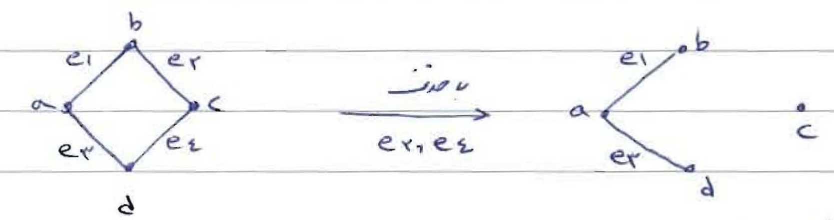


$K(G) = 4 - 1 = 3$ ۳ راس حذف شود، ناهمبند می‌شود.

همبندی یالی :

در یک گراف همبند، همبندی یالی را برابر با حداقل تعداد یالی می‌دانیم که با حذف آنها گراف ناهمبند شود و با $\lambda(G)$ نشان می‌دهیم.

$\lambda(G) = \min(k)$



$\omega(G - \{e_2, e_4\}) = 2$

- تعداد یالهای حذفی از ~~گراف~~ G که به گراف ناهمبند برسیم. $\lambda(G) = 2$

- هرگاه G ناهمبند یا بدیهی باشد بنابراین $\lambda(G) = 0$

۴-۲-۳ : به ازای هر گراف بدون حلقه (طوقه) و همبند G داریم:

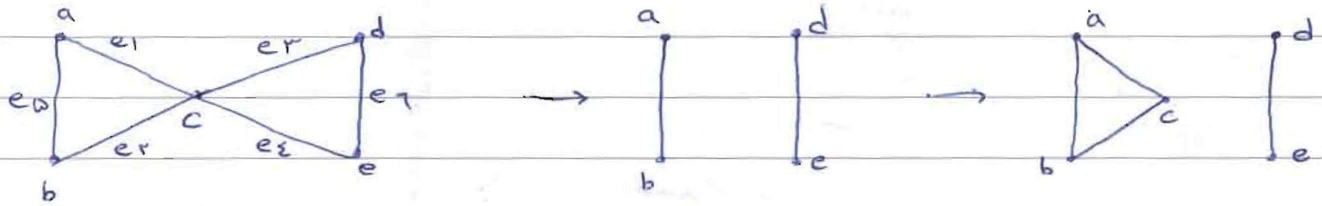
$K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

$K(G)$: تعداد رئوسی که اگر حذف شوند، گراف ناهمبند داریم.

$\lambda(G)$: تعداد یالهایی که اگر حذف شوند، گراف ناهمبند داریم.

$\delta(G)$: کمترین درجه رئوس در گراف همبند

$\Delta(G)$: بیشترین درجه رئوس در گراف همبند



$(2,2,2,2,4)$ $K(G)=1$ $\lambda(G)=2$

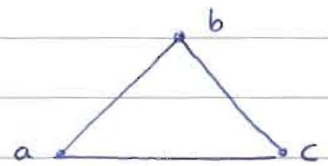
mindeg $\delta(G)=2$, maxdeg $\Delta(G)=4$ $1 \leq 2 \leq 2$

- همبندی رأسی و همبندی یالی یک گراف ساده مکعبی با هم برابرند. $K(G)=\lambda(G)$

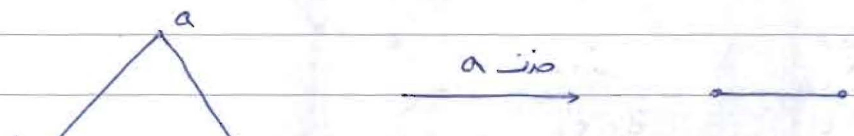
- گراف G جدا ناپذیر گوییم اگر ۱) نابدیهی باشد. $G=K_1$

۲) همبند باشد. $\omega(G)=1$

۳) گره/رأس برشی نداشته باشد.



$\nexists\, v_i \in V(G) : G-\{v_i\}$



$G-\{a\}$ همبند نیست

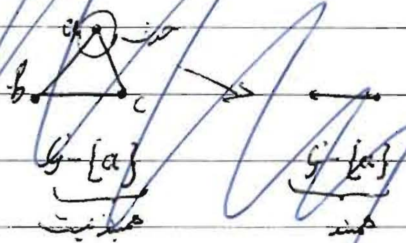
$G-\{a\}$ همبند

~~گراف G جدا ناپذیر گوییم اگر:~~

~~ناتهی باشد $G = K_1$ (بیش از یک رأس)~~

~~همبند باشد $\omega(G)=1$~~

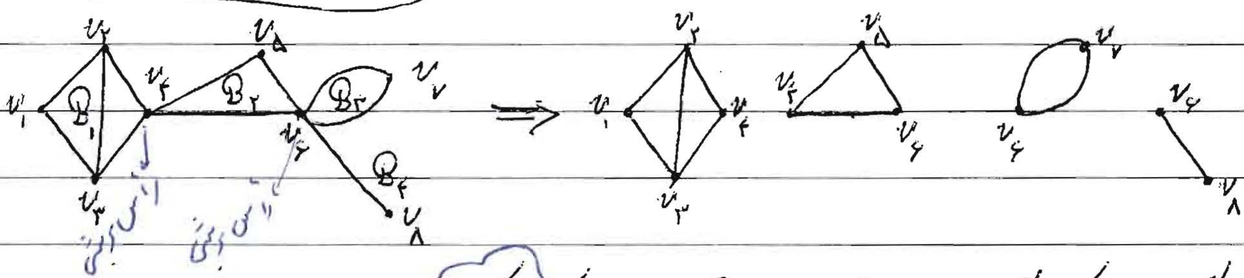
~~گره / رأس برشی نداشته باشد: $\nexists\, v_i \in V(G) : G-\{v_i\}$ ... وجود ندارد~~



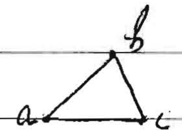
* بلوک:

زیرگراف ماکسیمال جدا ناپذیر باشد (از گراف G)

ت) ماکسیمال: یک جزء G که به طور سره در هیچ خوشه دیگری از G نباشد



ت) اگر G یک گره / رأس برشی نداشته باشد خود G یک بلوک است



بلوکی که تنها یک گره / رأس برشی از G دارد = بلوک پایانی

ت) بلوک B_3 تنها یک گره برشی v_6 است ⇐ بلوک پایانی

" B_1 " " " v_4 " " ⇐ " "

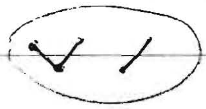
نه بلوک پایانی v_6 و v_4 هر دو به عنوان یک رأس برشی برای B_2 می‌باشد ⇐ B_2 دو رأس برشی دارد

فصل ۴: درخت‌ها

ت) گراف همبند بدون دور را درخت گویند

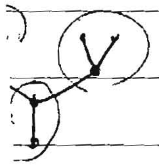
ت) هر گراف بدون دور جنگل است

ت) هر مولفه یک جنگل را درخت گویند



تبصره ۴-۱-۱: جنگل یک گراف ساده است

۴-۱-۲: یک زیرگراف از یک درخت یک جنگل است و یک زیرگراف همبند یک
یک زیر درخت است



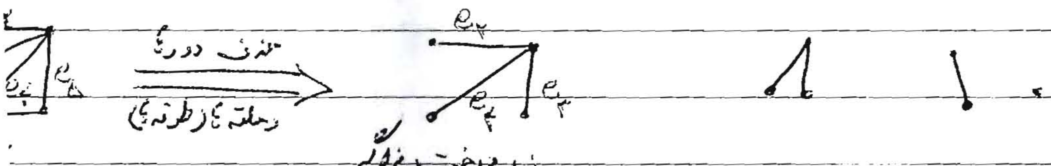
نکته: جنگل مجموعه‌ای است از درخت‌ها و جنگل ناهمبند است

نکته: در یک گراف همبند دو گره رأس حتما نیز توسط دست کم یک مسیر به هم وصل می‌شوند
درخت‌ها تنها گراف‌های ساده همبند هستند که هر دو گره از آن حتما توسط یک مسیر یکتا به

قضیه ۴-۱-۳: یک گراف ساده درخت است اگر و تنها اگر هر دو گره متمایز توسط یک مسیر به
یک زیرگراف فراگیر از یک گراف که درخت نیز باشد را درخت فراگیر گراف گویند

نکته: حلقه/طوقه نمی‌تواند به هیچ درخت فراگیری متعلق باشد چون حلقه/طوقه یک دور

نکته ۴-۱-۳: هر گراف همبند شامل یک درخت فراگیر است



هر گراف همبند شامل یک درخت فراگیر است

نکته: اگر درخت همبندی داشته باشیم که تعداد یال‌های آن $n-1$ باشد حتما آن درخت دور
مربوط به

۴-۱-۴: تعداد یال‌ها در یک درخت با n گره برابر $n-1$ است برعکس
با n گره و $n-1$ یال یک درخت است

$n=3$
$e=2$ $\Rightarrow$ $3-1=2$

۴-۱-۵: یک درخت با حداقل دو گره شامل دو گره آویخته می‌باشد

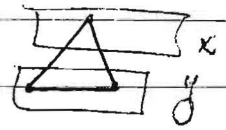
(11)

Subject: گراف

Year .... Month .... Date (۲۱)

۴-۱-۶: اگر $\delta(G) \geq 2$ آنگاه G شامل یک دور است

مینیمم درجه گره ها



۴-۱-۷: یک گراف همبند هر درخت گراف دوبخشی است

۴-۱-۸: یک گراف همبند با حداقل دو گره یک درخت است اگر و تنها اگر دنباله درجه آن ($d_1, \dots, d_n$) در شرط $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ با $d_i \geq 1$ برای هر i درست باشد

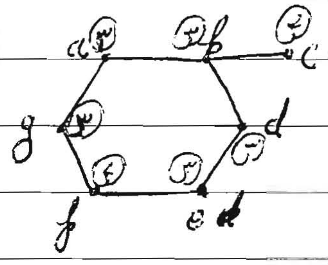
مرکز و مرکز ثقل:

هر گراف یک مرکز دارد که با c نمایش داده می‌شود و عبارتند از بیشترین فاصله u,v که با d (distance)

برای بدست آوردن شعاع و قطر ابتدا خروج از مرکز (e) همه گره‌ها را پیدا می‌کنیم کمترین مقدار شعاع و بیشترین مقدار قطر گراف است

شعاع : $r(G) = \min\{e(v) : v \in V(G)\}$

قطر : $diam(G) = \max\{e(v) : v \in V(G)\}$



فرض G همبند است بنابراین به ازای هر گره v داریم

$e(v) =$ خروج از مرکز گره v $= \max\{d(u,v) \mid u \in V(G)\}$

$$v=a \Rightarrow e(a) = \max\left\{\begin{array}{l} d(a,b)=1 \\ d(a,c)=2 \\ d(a,d)=2 \\ d(a,e)=3 \\ d(a,f)=2 \\ d(a,g)=1 \end{array}\right\} = 3$$

$$v=c \Rightarrow e(c) = \max\left\{\begin{array}{l} d(c,b)=1 \\ d(c,d)=2 \\ d(c,e)=3 \\ d(c,f)=4 \\ d(c,g)=3 \\ d(c,a)=2 \end{array}\right\} = 4$$

Sadat

$e(b)=\max\begin{Bmatrix} d(b,a)=۱ \\ d(b,c)=۱ \\ d(b,d)=۱ \\ d(b,e)=۲ \\ d(b,f)=۳ \\ d(b,g)=۲ \end{Bmatrix}=۳$

$e(d)=\max\begin{Bmatrix} d(d,a)=۲ \\ d(d,b)=۱ \\ d(d,c)=۲ \\ d(d,e)=۱ \\ d(d,f)=۲ \\ d(d,g)=۳ \end{Bmatrix}=۳$

$e(e)=\max\begin{Bmatrix} d(e,a)=۳ \\ d(e,b)=۲ \\ d(e,c)=۲ \\ d(e,d)=۱ \\ d(e,f)=۱ \\ d(e,g)=۲ \end{Bmatrix}=۳$

$e(f)=\max\begin{Bmatrix} d(f,a)=۲ \\ d(f,b)=۳ \\ d(f,c)=۴ \\ d(f,d)=۲ \\ d(f,e)=۱ \\ d(f,g)=۱ \end{Bmatrix}=۴$

$e(g)=\max\begin{Bmatrix} d(g,a)=۱ \\ d(g,b)=۲ \\ d(g,c)=۳ \\ d(g,d)=۳ \\ d(g,e)=۲ \\ d(g,f)=۱ \end{Bmatrix}=۳$

فاصله دورترین

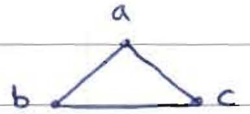
قطر G = $diam(G)=\max\{e(v) \mid v\in V(G)\}=\max\{۳,۳,۳,۴,۳,۴\}=۴$ قطر گراف همبند G

شعاع = $r(G)=\min\{e(v) \mid v\in V(G)\}=\min\{۳,۳,۳,۴,۳,۴\}=۳$

رئوس مرکزی = مرکز گراف = $\{a,b,d,e,g\}$

گراف کامل :

در گراف کامل شعاع برابر قطر می باشد .



$$\left.\begin{array}{l} d(a,b)=1 \\ d(a,c)=1 \end{array}\right\} \to max=1$$

$$1 = e(a) = e(b) = e(c)$$

$$\left.\begin{array}{l} d(c,a)=1 \\ d(c,b)=1 \end{array}\right\} \to max=1$$

$$max = 1 = diam(G)$$
$$min = 1 = r(G)$$

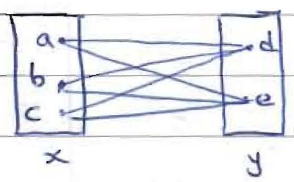
$$\left.\begin{array}{l} d(b,a)=1 \\ d(b,c)=1 \end{array}\right\} \to max=1$$

گراف G را یک گراف دوبخشی نامیم ، اگر بتوان مجموعه رئوس $V(G)$ را به دو مجموعه ناتهی x و y افراز نمود ، به گونه ای که هر یال که در نظر می گیریم ، نقطه آغاز آن در x و نقطه پایان آن در y باشد .

$$x \cap y = \emptyset \quad \& \quad x \cup y = V(G) \quad \& \quad x, y \neq \emptyset$$

گراف دوبخشی کامل :

گراف G را دوبخشی کامل نامیم اگر ۱) G گراف دوبخشی باشد . ۲) هر دو رأس گراف G باهم مجاور باشند .



$x \cup y = V(G)$ مجموعه رئوس گراف $\{a,b,c,d,e\}$

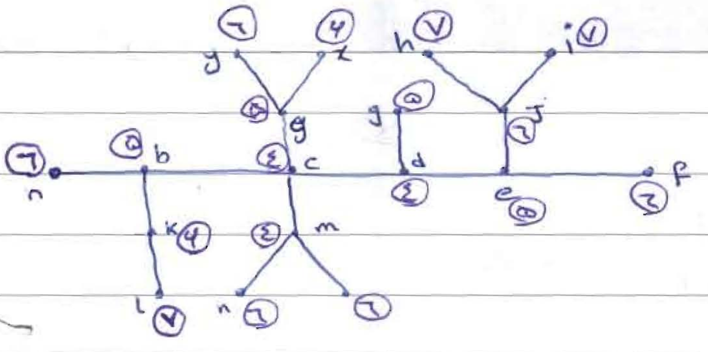
$\& \quad x \cap y = \emptyset \quad \& \quad x, y \neq \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} d(a,b)=2 \\ d(a,c)=2 \\ d(a,d)=1 \\ d(a,e)=1 \end{array}\right\} \to max=2 \to e(a)=2$$

$$\Rightarrow r(G) = diam(G) = 2$$

دوبخشی کامل

$$\left.\begin{array}{l} d(d,a)=1 \\ d(d,b)=1 \\ d(d,c)=1 \\ d(d,e)=2 \end{array}\right\} \to max=2 \to e(d)=2$$



$r(G) = ٤$

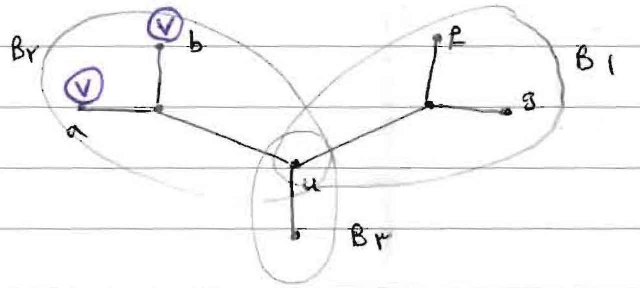
$diam(G) = ٧$

نکته: یک شاخه در گره v از درخت T یک زیردرخت max (ماکزیمال) شامل u، نقطه پایانی آن باشد.

بنابراین تعداد شاخه‌ها در u برابر است با $d(u)$

- وزن هر گره u از درخت T برابر با بیشترین تعداد یالها در هر شاخه در u است.

- اگر گره‌ها بیشترین وزن را داشته باشند، آنها مرکز ثقل T نامیم. مجموعه همه گره‌های مرکز ثقل را مرکز ثقل T گوییم.



T همبند بوده در درجه b ۷ می‌باشد.

تعداد یالها = وزن شاخه / وزن گره‌های پایانی

وزن u : ماکزیمم وزن شاخه‌ی گره u

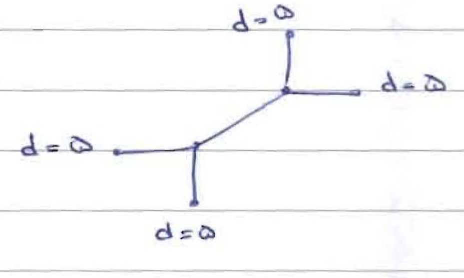
$d(u) =$ تعداد شاخه‌ی گره u $= ۳$

$d(u) =$ تعداد شاخه‌ی گره u = تعداد زیردرختها با گره پایانی u $= ۳$

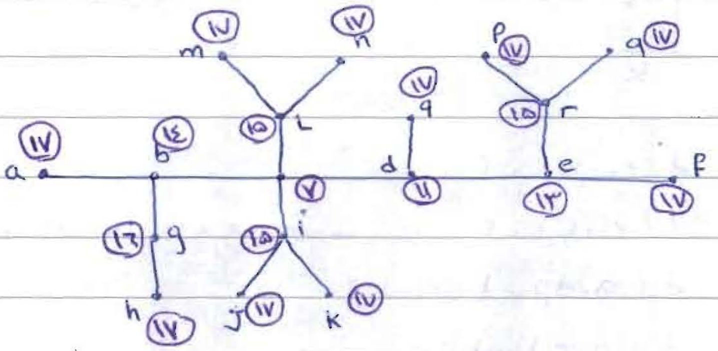
مجموعه مرکز ثقل: $\{a, d, f, g\}$

- گره‌های پایانی در یک درخت T دارای وزن یکسان هستند.

$m(T) =$ وزن هر گره پایانی



$m(T) = |E(T)| = ۵$



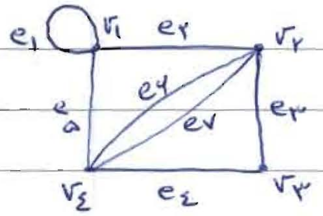
تعداد یالها $= ۱۷$

شمارش درخت های فراگیر :

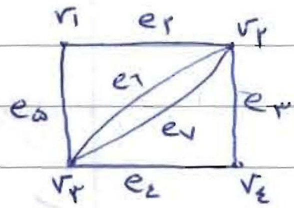
یک زیرگراف فراگیر از یک گراف، که درخت نیز باشد را درخت فراگیر گراف گوییم.

تعداد درخت فراگیر همبند برچسب دار (G) :

- اگر قرار باشد یالی حذف شود : $m(G-e)$
- اگر قرار باشد با حذف یالی دو رأس یکی شوند : $m(G).e$



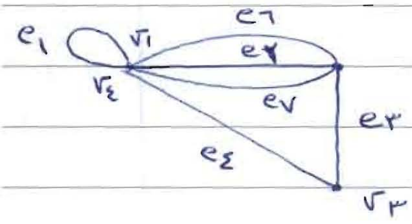
حالت اول : اگر e (که قرار است حذف شود) حلقه باشد :



$$m(G.e) = m(G) - 1 = 6 \quad = G.e_1$$
$$n(G.e) = n(G) = 4$$
$$w(G.e) = w(G)$$

در این حالت تعداد رئوس تغییری نمی کند، ولی تعداد یالها نسبت به حالت اولیه یکی کاهش می یابد.

حالت دوم : اگر e حلقه نباشد. حذف e_5 .



$$m(G.e) = m(G) - 1 = 6$$
$$n(G.e) = n(G) - 1 = 3$$
$$w(G.e) = w(G)$$

در این حالت یک یال (e_5) حذف می شود و موجب می شود دو رأس v_1 و v_4 یک گره شوند.

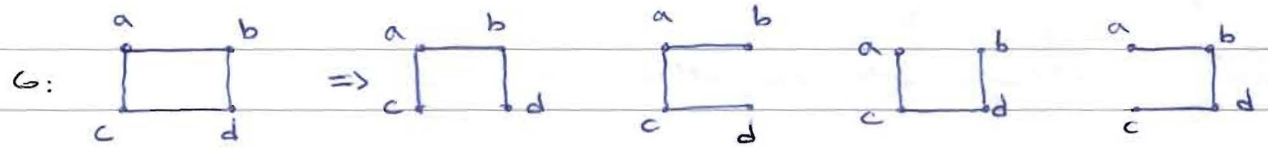
همبندی ها هم برابر می باشد.

نکته : اگر e حلقه نباشد : تعداد درخت های فراگیر گراف همبند برچسب دار $= T(G)$

$$T(G) = T(G-e) + T(G.e)$$

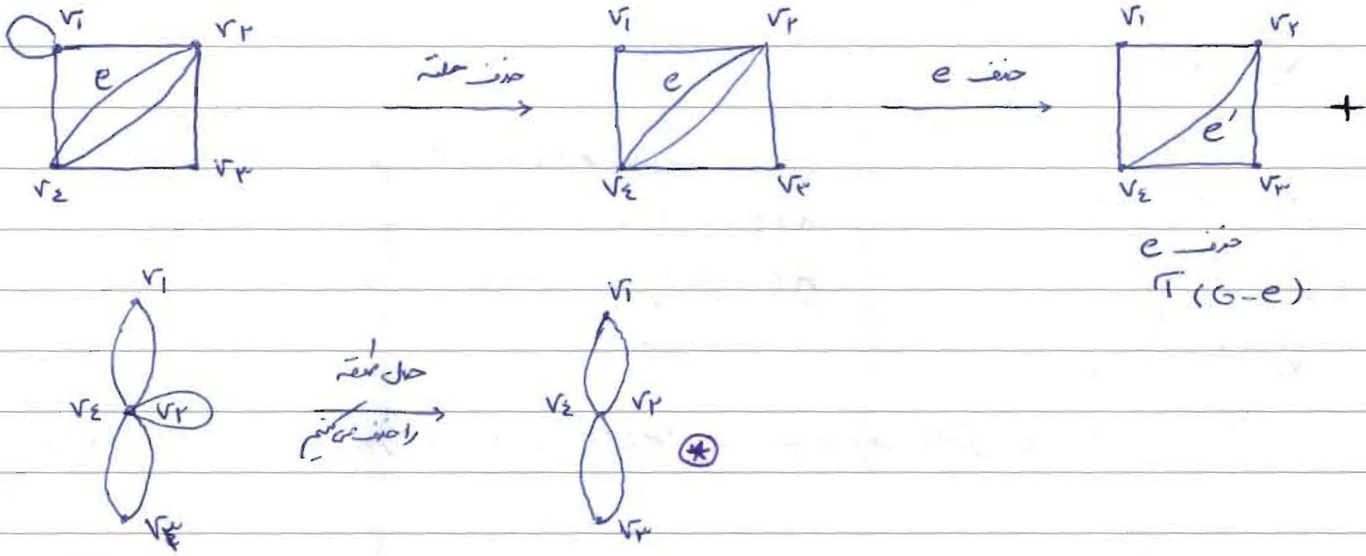
$T(G-e)$: تنها یال e را حذف می کنیم : $a \overset{e}{—} b \leftarrow a \cdot \quad \cdot b$

$T(G.e)$: یال e حذف می شود و دو گره یکی می شوند : $a — b \leftarrow ab$



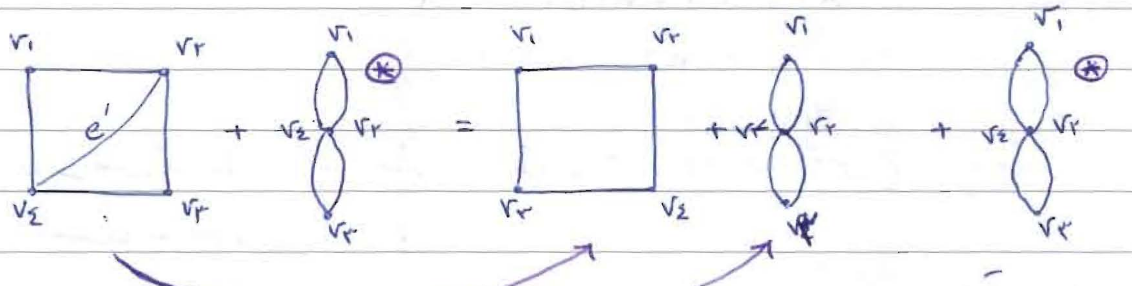
$\tau(G) = 4$ تعداد درخت های فراگیر گراف G

مثال: تعداد درخت های فراگیر گراف زیر را بدست آورید:



یکی کردن رئوس v_2 و v_4

$\tau(G.e)$

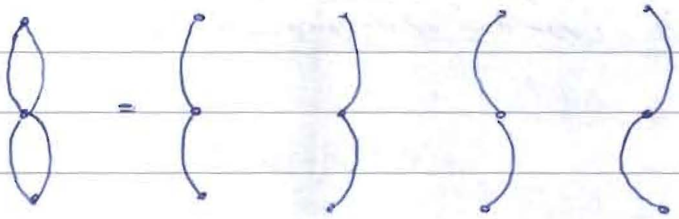


$\tau(G-e') + \tau(G.e')$

مانده از حالت قبل

$\tau(G.e)$

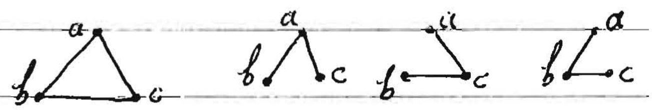
داریم: $\tau(G-e') + \tau(G.e') + \tau(G.e) = 4+4+4=12$



ن: فرمول کیلی ← درخت گراف کامل

ن ۱-۴-۴ : $T(K_n)=n^{n-2}$ که در آن K_n گراف کامل برچسب دار با n گره $2\le n$ است

K_n ← (حروف انگلیسی)



$T(K_2)=2^{2-2}=2^0=1$

$n=2$

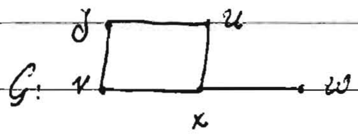
$T(K_3)=3^{3-2}=3^1=3$

تعداد درخت فراگیر

گفتار پنجم:

مجموعه مستقل رأسی (گره‌ای):

یک زیرمجموعه S از مجموعه گره‌های V از گراف G را مستقل گوییم هرگاه هیچ دو گره‌ای از S در G مجاور نباشند



S:

$S\subseteq V(G)=\{y,x,v,u,w\}$

$S'=\{x,y\}$ این دو گره در گراف G نامجاورند ، $S''=\{v,u,w\}$ این سه گره در گراف G نامجاورند

$|S'|=2$ ، $|S''|=3$

$S\subseteq V$ را مجموعه مستقل ماکسیمم max از G گوییم اگر هیچ مجموعه مستقل S' با $|S'|>|S|$ وجود نداشته باشد

ن: S'' وجود ندارد که $|S''|=4>|S''|=3$

یک مجموعه مستقل ماکسیمال از G یک زیرمجموعه مستقل است که زیرمجموعه سره‌ی مجموعه مستقل دیگری نباشد

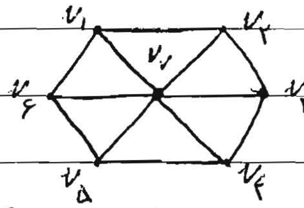
$\nexists S': S\subset S' \iff$ S مجموعه مستقل گره ماکسیمال است

ن: $S'=\{x,y,\square\}$ (عضوی دیگر) $\not\Rightarrow$:

$S'=\{x,y\}\subset S'\{x,y,\square\} \Rightarrow$ S مستقل گره‌ای ماکسیمال G است

مستقل گره‌ای وجود ندارد

یک زیر مجموعه K از V را یک پوشش گوییم هرگاه هر یال در G حداقل یک گره از K مجاور باشد



$K \subseteq V(G)$

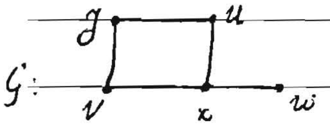
G: چرخ

$K = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

پوشش گره‌ای مینیمم: پوشش گره‌ای برای G

* پوشش K مینیمم است اگر هیچ پوشش K' از G به شرط $|K'| < |K|$ وجود نداشته باشد

۲* و آنرا مینیمال گوییم اگر پوشش K از G که زیر مجموعه سره‌ای (K) باشد وجود نداشته باشد (در کتاب هم درست نیست)



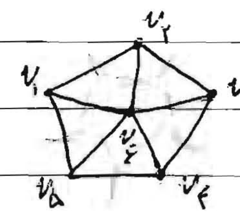
چون هر یال G با حداقل یک گره از K مجاور باشد $K = \{x, y\} \subset V(G)$ پوشش گره‌ای

پس K پوشش است

$|K| = 2$

$K_1 = \{v, u, w\}$

$|K_1| = 3$



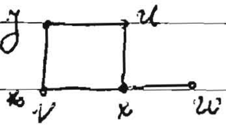
پوشش گره‌ای $K = \{v_1, v_3, v_4, v_6\} \subset V(G)$

$K_1 = \{v_2, v_3, v_4\} \subset K = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$

۲* K پوشش گره‌ای مینیمال $\iff$ $\nexists K_1 \quad K_1 \subset K$

یک زیر مجموعه J از V مستقل است اگر و تنها اگر V/J پوشش گره‌ای G باشد

J مجموعه مستقل گره‌ای است هرگاه در مجموعه J هیچ دو گره‌ای با هم مجاور نباشند



پوشش گره‌ای K: $(V(G) = \{v, u, w, x, y\}) - J = K = V(G) - J = K$

$J = \{x, y\} \subset V(G)$ هیچ دو گره‌ای با هم مجاور نیستند

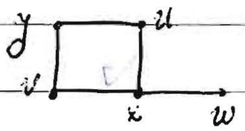
هر یال در G حداقل با یک گره در K $\Longleftarrow$ $K = \{v, u, w\}$ پوشش گره‌ای

(۱۵)

Subject: گراف

Year .... Month .... Date ..(۲۹)....

- اگر مجموعه K پوشش گره‌ای باشد ⟸ $V(G)-K = S$ مستقل گره‌ای



- شمار تعداد گره‌های یک مجموعه مستقل ماکسیمم از G را عدد استقلال G می‌نامیم و با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم

- شمار تعداد گره‌ها در یک پوشش مینیمم را عدد پوششی G می‌نامیم و با $\beta(G)$ می‌نامیم

$\alpha(G) = |\{v, u, w\}| = 3$

$\beta(G) = |\{x, y\}| = 2$

- به ازای هر گراف G داریم: $\alpha + \beta = n$ ؛ $n(G)$ مرتبه $= |V(G)| =$ عدد پوشش + عدد استقلال

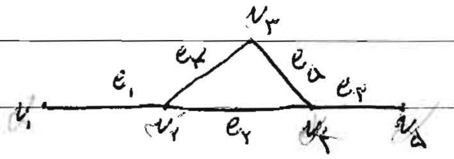
$3+2=5$

مجموعه گره‌ای مینیمم = مجموعه‌ای از گره‌های گراف که دارای کمترین تعداد عضو است به گونه‌ای که هر یال G حداقل با یک گره از این مجموعه مجاور است

- مجموعه مستقل یالی

یک زیرمجموعه M از مجموعه یال‌های E

از گراف بدون حلقه G را مستقل یالی گوییم اگر هیچ یال M در G مجاور نباشد



$M \subset E(G)$

یک جورسازی در G یک مجموعه مستقل از یال‌هاست

مستقل $M_1 = \{e_1, e_3\}$; $M_2 = \{e_1, e_5\}$

گره مشترک بین دو راس یا یال نباشد (مجاور نیستند)

- یک پوشش یالی از G یک زیرمجموعه L از E است به گونه‌ای که هر گره حداقل با یکی از یال‌های L مجاور باشد به گونه‌ای که $\delta > 0$ (δ: مینیمم درجه گره‌ها) (گره تنها نداشته باشد)

$L = \{e_1, e_3, e_4\} \subseteq E(G)$

پوشش یالی ؛ $\forall v \in V(G)$ دست کم یکی از یال‌های L مجاور باشد

- یک جورسازی M از G را ماکسیمم گوییم اگر G هیچ جورسازی M' که $|M'| > |M|$ نداشته باشد

Subject: گراف

Year .... Month .... Date (۳۰)

این دو جورسازی maximum ماکسیمم است $M_1=\{e_1,e_5\}$; $M_2=\{e_1,e_3\}$

$M_3=\{e_4,e_3\} \subset E(G)$ $|M_1|=|M_2|=|M_3|=2$

$M \subseteq E(G)$ جورسازی / مستقل یالی

الف) M_1, M_2, M_3 maximum جورسازی است $|M_4\ \{e_2\}|=1$

ب) M_4, M_5 جورسازی maximum نیست $|M_5\ \{e_3\}|=1$

پ) چون نمی‌توان هیچ مجموعه مستقل یالی با ۳ عضو پیدا کرد ما تنها مجموعه مستقل یالی با ۱ و ۲ عضو داریم بنابراین M_1 یک جورسازی maximum خواهد بود و همچنین M_2, M_3

ت) α' :

تعداد اعضای مجموعه مستقل یالی maximum که در اینجا برابر ۲ است

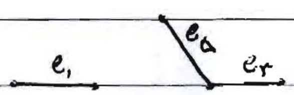
L_1 پوشش یالی است چون هر عضو آن با حداقل یک عضو از $E(G)$ با $V(G)$ مجاور است (به وسیله $v \in V(G)$) $L_1=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$

هیچ مجموعه‌ای با ۲ یال پوشش یالی برای G نخواهد بود بنابراین حداقل ۳ یال برای ایجاد مجموعه پوشش یالی نیاز داریم

ث) β' :

تعداد اعضای مجموعه پوشش یالی minimum

$\beta'=|L_2|=3 \Rightarrow \beta'=3$

ماکسیمال پوشش یالی  $L_2=\{e_1,e_3,e_5\}$

- یک مجموعه S از گره‌های G را اشباع شده توسط M از S گوییم اگر هر گره S با حداقل یک یال در M مجاور باشد

Sadat

یک گره v از G را اشباع نشده گوییم هرگاه M اشباع شده نباشد

هر گره با حداقل یک یال از M مجاور است هم مجموعه S توسط M اشباع شده

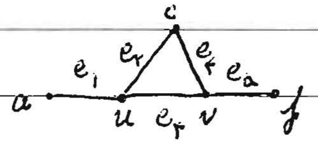
$M = \{e_3, e_4\}$

$S = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$S' = \{v_1\}$ — v_1 توسط هیچ کدام از یالهای M نیست پس S' توسط M اشباع نشده است

یک جورسازی از یک گراف G یک مجموعه مستقل از یالهای G است

اگر $e = uv$ یک یال در جورسازی M از G باشد گوییم گره‌های پایانی u, v توسط M جوری شوند



جورسازی $M_1 = \{e_5, e_1\}$

" $M_2 = \{e_5, e_2\}$ — گره‌های a,c توسط M_2 جوری شوند

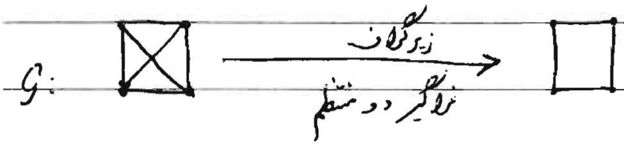
" $M_3 = \{e_3\}$ — " " M_3 " u,v "

Q: تفاضل متقارن دو مجموعه $M_1 \Delta M_2 = M_1 + M_2 - M_1 \cap M_2 = \{e_5, e_1\} + \{e_5, e_2\} - \{e_5\} = \{e_1, e_2\}$

یک عامل از گراف G یک زیرگراف گسترده (فراگیر) از G است

یک K عامل از G یک عامل از G است که K منتظم باشد

یک گراف G را K تجزیه پذیر نامیم اگر G یک اجتماع از K عامل های مجزا یال باشد



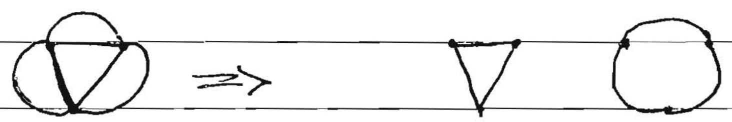
۲ عامل (چون درجه هر گره ۲ است)

زیرگراف فراگیر: عامل K → درجه هر گره K باشد
K منتظم

Subject: گراف
Year .... Month .... Date (۲۰)

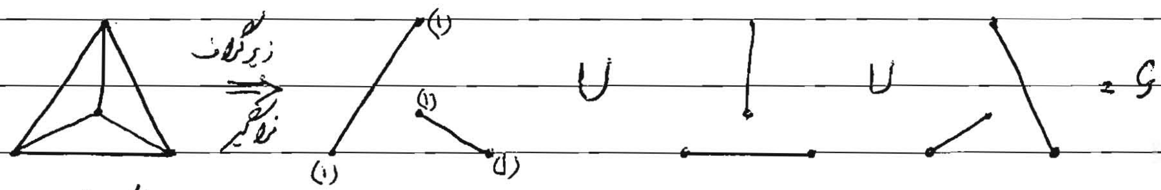
H_1 H_2 $H_1 \cap H_2 = \emptyset$

k-عامل k-عامل یالی



۲ تجزیه پذیر ۲ عامل ۲ عامل

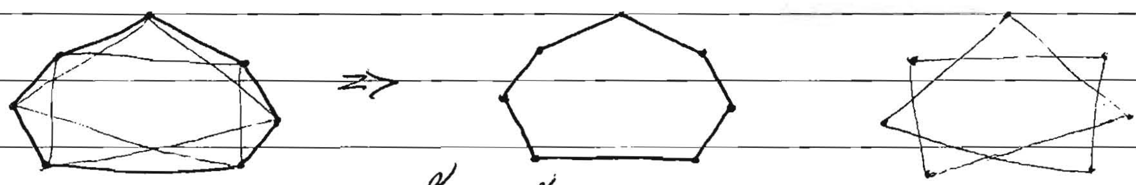
چون به چند ۲ عامل تجزیه شده است



k تجزیه پذیر ۱ عامل ۱ عامل ۱ عامل

۱ تجزیه پذیر

۱ عامل { ۱ منتظم ، فراگیر }



۳ تجزیه پذیر ۲ عامل { زیرگراف فراگیر ، ۲ منتظم }

$(G = H_1 \vee H_2)$ $G = H_1 \vee H_2$

(۲) گراف G به چند زیرگراف k عامل تجزیه شده است پس k تجزیه پذیر است

گفتار ششم:

گراف اویلری:

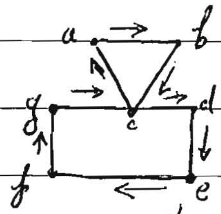
Subject: گراف
Year .... Month .... Date ۳۲

یک گذر اویلری در یک گراف G یک گذر گردشی در G است که شامل همه یال‌های G باشد

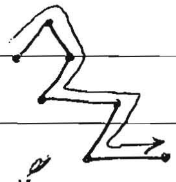
یک سیر اویلری یک گذر اویلری بسته است. G را اویلری گوییم هرگاه G دارای یک سیر اویلری باشد

① گذر: گشتی که یال تکراری نداشته باشد

اویلری: همه یال‌ها طی شود



گراف اویلری

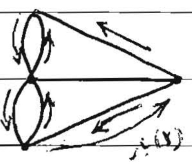

گذر اویلری

گذر اویلری:

همه یال‌ها طی می‌شود و یال تکراری دیده نمی‌شود

اگر نقطه آغاز و پایان گذر اویلری یکسان باشد ⇐ سیر اویلری ⇐ گراف اویلری

گراف نااویلری



چون برای گذر از یال‌ها نیاز است که از برخی یال‌ها بیش از یکبار بگذریم

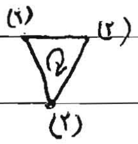
پس گذر اویلری نداریم آنگاه گراف، گراف نااویلری است

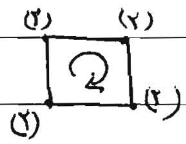
② ۶-۱-۲ : برای هر گراف همبند G که یک گراف اویلری است

① گراف G اویلری است

② درجه هر گره G عدد صحیح مثبت زوج است

③ G اجتماع دورهای مجزا یال است





$\delta(G) \geq 2 \Rightarrow G$ دارای دور است

$G - E_1(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r)$

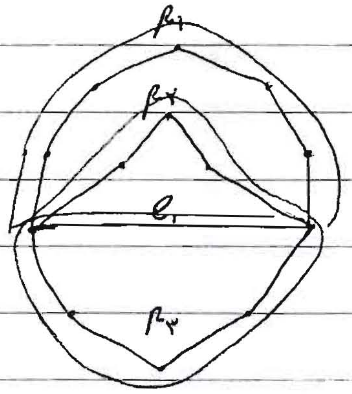
گراف‌ها کاملاً ناهمبند می‌شوند

از این رو G اجتماع مجزا-یال دورهای C_1 تا C_r است

③ ۶-۱-۳: G یک گراف اویلری است اگر و تنها اگر هر یال G به تعدادی فرد دور در G متعلق باشد

Subject: ....گراف...........
Year .... Month .... Date (۳۶).......

~~۶-۱-۳~~



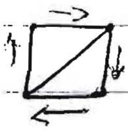
مسیر اویلری .... $e_1 \in p_1$

$e_1 \in p_2$

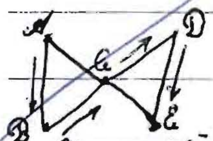
$e_1 \in p_3$

شکل ۱۲۶
ش ۳-۶

گراف همیلتونی



ت ۱-۲-۶) هر گراف همیلتونی به گرافی که دارای یک دور فراگیر شده باشد



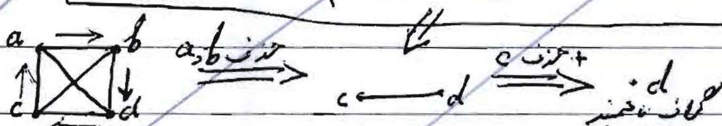
ت ۲-۲-۶) گراف G را قابل دنبال گوییم هرگاه یک مسیر گسترده فراگیر در G وجود داشته باشد. یک مسیر گسترده G را یک مسیر همیلتونی از G نامیم. مسیر: ABCDE

همه گره‌ها باید ... نیازی نیست مسیر بسته باشد

~~ت ۴-۲-۶) اگر G همیلتونی است ...~~

~~$|S| \geq \omega(G-S)$~~

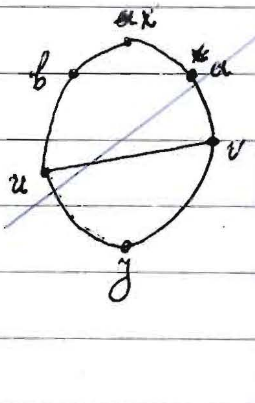
ت گاهی نیاز است حذف ها چند بار انجام دهیم تا گراف ناهمبند شود



~~هر گراف همیلتونی~~ دست کم

هر گراف همیلتونی باید دو همبند باشد

ت دو همبند: گراف G دو همبند است هرگاه حداقل دو گره از گراف G حذف شود گراف تبدیل به گراف ناهمبند می‌شود



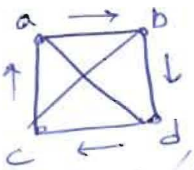
~~xva~~

vaxbugv ⟹ گراف همیلتونی ⟸ دور فراگیر

(۱۸)

گراف همیلتونی: اگر گراف G را بتوان از رئوس با شروع نقطه دارای یک مسیر بسته (فراگیر) در G پیمایش کرد که تمامی رئوس در مسیر حرکت طی شوند. (دارای دور فراگیر بسته باشد)

گراف G را دوهمبند گوییم هرگاه حداقل دو رأس از گراف G حذف شود، گراف تبدیل به گراف ناهمبند می شود.



باید a و d حذف شود.

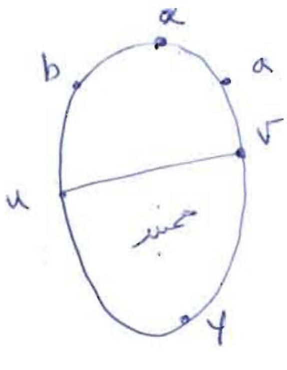
اگر دو رأس حذف شود K_2 می ماند که باز همبند است.

پس باید ۳ رأس حذف شود تا ناهمبند شود که K_1 می شود که یک نقطه است.

گراف دوهمبند:

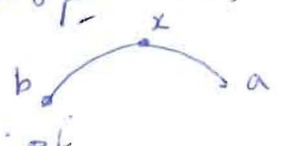
- هر گراف همیلتونی باید حداقل دوهمبند باشد.

- مثال شکل ۶.۸ صفحه ۱۳۲ کتاب



vaxbuyv → دور فراگیر گراف همیلتونی

اگر u و v را حذف کنیم گراف به دو قطعه تقسیم می شود و دیگر همبند نیستند.



ناهمبند

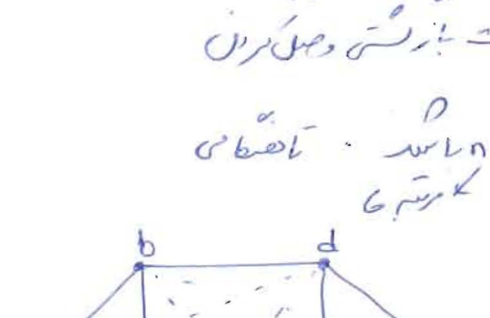
۵۶

الف: ۴۳

بستار گراف: بستار گراف G را که با Cl(G) نشان می دهیم، برابر با زیرگراف G حاصل از G است که به صورت بازگشتی وصل کردن زوج رأس های نامجاور که مجموع درجه آنها حداقل n باشد (که مرتبه G) تا هنگامی که دیگر چنین زوج هایی وجود نداشته باشد.

$H \subseteq G$ زیرگراف زیرگراف

$n=6$ درجه گراف



$d(b)+d(e)=6$

رأس b و e را برای به دست آوردن بستار گراف به هم وصل می کنیم.

$d(d)+d(c)=6$ → به هم وصل می کنیم

$d(a)+d(d)=6$ نامجاورند a,d

$d(a)+d(e)=7$ $d(a)+d(f)=6$ $d(c)+d(f)=7$ $d(b)+d(f)=8$

نکته : گراف $C(G)$ ار همیلتونی باشد آنگاه G همیلتونی است .

یعنی دارای دور فراگیر باشد ، از abdfeca ← یعنی مسیری وجود دارد همه رئوس طی می شود و

نقطه شروع و پایان یکسان می شود . پس دارای دور فراگیر هستیم .

فصل ۷ :

شش ماده داریم $A - B - C - D - E - F$

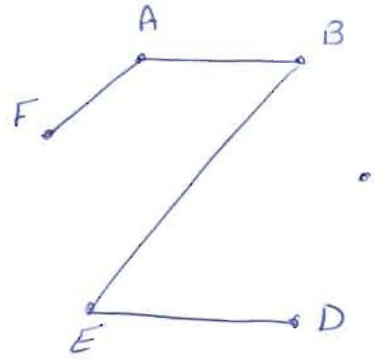
دو ماده با هم سازگاری ندارند .

$(A,B)(D,E)(A,F)(B,E)$

گراف با مشخصات زیر رسم می کنیم .

۱) هر رأس گراف معادل است با یک ماده شیمیایی

۲) هر یالی در گراف معادل است با ناسازگار بودن دو ماده شیمیایی



هیچ یالی به هم ندارند $\{A,C,D\}$: مجموعه مستقل رأسی

$\{F,B\}$

~~$\{A,E\}$~~ نمی نویسیم چون با قبلی اشتراک دارد

$\{E\}$

پس : $\{\{A,C,D\}\{F,B\}\{E\}\}$ ۳ عضو

دو خاصیت دارد : ۱- تهی نبودن

۲- باهم اشتراک نداشته باشند دو به دو جدا

۳- اجتماعشان کل رئوس را باید پوشش دهند .

عدد رنگی گراف $\boxed{\chi(G)=2}$ جواب مسئله است .

۲) $\{\{B,C,D,F\}\{A,E\}\}$ ۲ عضو ←

به هر کدام از افرازها یک طبقه رنگی گفته می شود .

۳) $\{\{A\}\{B\}\dots\{F\}\}$ ۶ عضو

— ۳ هر کدام از زیر مجموعه‌ها یک رده رنگی گفته می‌شود.

تعریف : $\boxed{7-1-1}$: عدد رنگی از یک گراف G $(X(G))$ برابر است با مینیمم تعداد زیر مجموعه‌های مستقل که مجموعه رئوس G را افراز می‌کند.

- رنگ آمیزی رئوس G یک نگاشت $f: V \to S$ است که S مجموعه رنگ‌های متمایز است.

- اگر رئوس مجاور در G رنگ‌های متمایز دریافت کنند آنگاه سره می‌شوند.

یال
$$uv \in E(G) \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

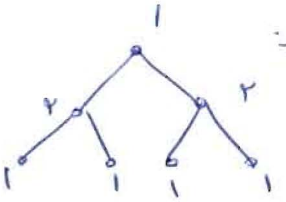
تعریف ۷-۱-۲ : عدد رنگی برابر مینیمم رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ آمیزی سره یک گراف است.

تعریف ۷-۱-۳ : یک k رنگ آمیزی از گراف G عبارت است از یک رنگ آمیزی رئوس G که از k رنگ استفاده می‌کند.

نکته : هنگام در نظر گرفتن اعداد رنگی، یال‌های موازی و طوقه‌ها را می‌توان حذف کرد.

نکته : $\boxed{X(G)=2}$ اگر و تنها اگر G دوبخشی با حداقل یک یال باشد.

نتیجه : برای هر درخت G با حداقل یک یال عدد رنگی $\boxed{X(t)=2}$ می‌باشد.
درخت



$\boxed{\text{در گراف کامل } X(K_n)=n}$ ← یعنی تعداد رنگ‌ها با تعداد رئوس برابر است.

اگر گراف منتظم داشته باشیم:

$$X(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ زوج} \\ 3 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

گراف منتظم

↓ رأس‌ها
n تعداد رأس‌های انتخابی باشد
در گراف منتظم

α : عدد استقلال : تعداد رئوس یک مجموعه مستقل ماکزیمم

قضیه ۷-۱-۵ : در گراف G با n رأس و عدد استقلال α داریم $\frac{n}{\alpha} \le \chi \le n-\alpha+1$

قضیه ۷-۱-۷ : به ازای هر گراف ساده G داریم :

$$2\sqrt{n} \le \chi + \chi^c \le n+1$$

$$n \le \chi \chi^c \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

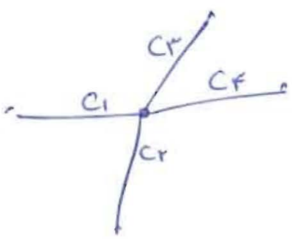
نکته تستی : اگر G داشته باشیم به صورت G^c

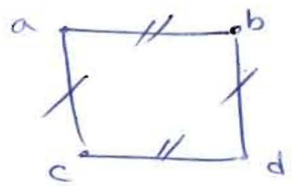
$\chi(G^c) =$ عدد رنگی گراف G^c

: G ساده

تعریف ۷-۴-۳ : مینیمم عدد k که گراف بدون طوقه G که G دارای k رنگ آمیزی باشد را عدد رنگی یالی یا شاخص رنگی G می‌نامیم.

نمایش $\chi'(G)$ ، G را k یال رنگی می‌گوییم اگر $\chi'(G)=k$





شاخص رنگی

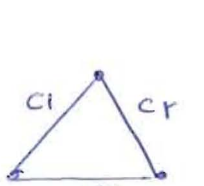
∀G گراف بدون طوقه $\boxed{\Delta(G) \le \chi'(G)}$

ماکزیمم درجه رئوس ≤ شاخص رنگی گراف .

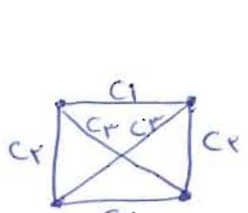
قضیه ۷-۴-۳ : اگر G یک گراف بدون طوقه دوبخشی باشد دارای $\boxed{\chi'(G)=\Delta(G)}$

قضیه ۷-۴-۴ : به ازای گراف کامل ساده K_n در این صورت شاخص رنگی تعریف می‌شود

$$\chi'(K_n) \begin{cases} n-1 & n \text{ زوج} \\ n & n \text{ فرد} \end{cases}$$



$\chi'(K_3)=3$



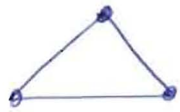
$\chi'(K_4)=3$

ص ۱۷۱

قضیه ۷-۴-۵ : (وایزینگ - ویزینگ)

$$\Delta(G) \leq X'(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

تعریف ۷-۴-۶ : گراف‌هایی که برای آنها داشته باشیم $\Delta = X'$ را گراف از رده ۱ می‌گوییم و آن‌هایی که $X' = 1 + \Delta$ را گراف‌های از رده ۲ می‌نامیم.

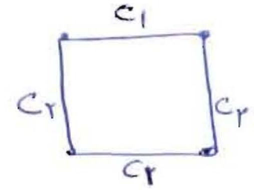


K_3

$X'(K_3) = 3$

$\Delta = 2$ که فرض درجه رئوس

پس گراف از درجه ۲ است.



$$\left.\begin{array}{l} X' = 2 \\ \Delta = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow X' = \Delta \quad \text{چون}$$

پس این گراف از رده ۱ است.

نکته: گراف‌های دوبخشی از رده یک است.

همه درخت‌ها، دورها و چرخ‌ها مسطح هستند / گراف پترسون نامسطح است.

فرمول اویلر: برای گراف همبند مسطح شده G داریم: $n - m + l = 2$ که l نشان دهنده تعداد وجوه G است.

- اگر G گراف ساده مسطح با حداقل سه رأس باشد: $m \leq 3n - 6$
- مکمل هر گراف ساده مسطح با ۱۱ رأس، نامسطح است.
- به ازای هر گراف ساده مسطح G داریم: $\delta(G) \leq 5$
- گراف ساده مسطح دارای حداقل ۴ رأس با درجه حداکثر ۵ است.

K_5 ، $K_{3,3}$ نامسطح

(1)

زیرگراف : H زیرگراف G $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$

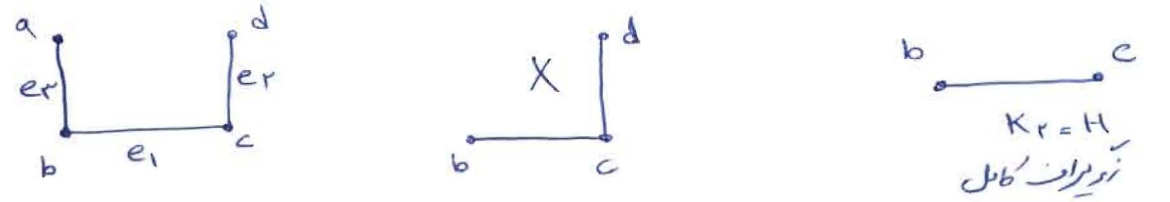
زیرگراف سره : $V(H) \neq V(G)$, $E(H) \neq E(G)$

زیرگراف القائی : زیرگراف H از G را القائی نامیم هرگاه هر یال G که پایان هایش در $V(H)$ باشد، یک یال در H نیز باشد. (یعنی اگر گره ها در زیرگراف بودند، حتما یال های متصل به آن هم باشند)

زیرگراف فراگیر : هرگاه همه رئوس منتقل شوند. $V(H) = V(G)$

زیرگراف القاء شده از G ~~[illegible]~~ با مجموعه رأس $S \subseteq V(G)$ را القاء شده از G توسط S می نامیم و با $G(S)$ نشان می دهیم.

زیرگراف کامل : به ازای هر گره موجود در گراف H ، هر دو گره با هم مجاورند (یعنی بین هر دو گره حتما یک یال وجود دارد)



$K_2 = H$
زیرگراف کامل

- خوشه : یک زیرگراف کامل از گراف G را خوشه نامیم.

- خوشه ماکزیمال : خوشه ای که زیرمجموعه هیچ خوشه دیگری نباشد.

- حذف کردن یالها : فقط یال حذف می شود.
- " " گره ها : با حذف گره، یال های متصل به آن نیز حذف می شوند

درجه رأس ها : تعداد یالهای خروجی از هر رأس.

$\Delta(G)$ = بزرگترین درجه رأس
$\delta(G)$ " کوچکترین " "

- اگر درجه همه رأس ها برابر باشند و آن مقدار K باشد، آن گراف را K منتظم نامیم.
- گراف ۳ - منتظم ← مکعبی

- زیرگراف فراگیر ۱ منتظم از G را یک عامل یا جورسازی کامل G می نامیم.

- رأس تنها : رأسی که درجه آن صفر باشد . $d_G(v) = 0$
- رأس آویخته : رأسی که درجه آن یک باشد .
- یال آویخته : وجود داشته باشد یک رأس که فقط یک یال از آن خارج شده باشد .
- قضیه اویلر : مجموع درجه رئوس برابر است با ۲ برابر تعداد یالها . $\sum d_G(v) = 2 m_G$
- نتیجه قضیه اویلر : تعداد رأس ها با درجه فرد ، زوج است .
- دنباله گرافیکی : دنباله $(d_1, ..., d_n)$ را گرافیکی نامیم ، اگر بتوان یک گراف ساده به ازای آن رسم نمود .

مسیر و همبندی G :

گشت : دنباله ای از رئوس و یالها در یک گراف

گشت بسته : اگر رئوس ابتدائی و انتهائی برابر باشند .

طول گشت : به تعداد یالهای گشت می باشد .

گذر : اگر در گشت یال تکراری نداشته باشیم .

مسیر : اگر " " رأس " " .

یک مسیر بسته را دور می نامیم .

C_n : یک دور به طول n ← یعنی n برابر تعداد یالهاست .

P_n : یک مسیر روی n رأس

هم بندی : هرگاه بتوان روی یک گراف ، یک مسیر رسم کرد .

مولفه همبندی را با ω نشان می دهیم و اگر همبند باشد باید $\omega_G = 1$ باشد .

$d(u,v)$: کوتاه ترین مسیر بین u و v

$d(u,v) = \infty$ اگر دو گره در دو مؤلفه گراف جدا از هم وجود داشته باشد .

اگر G ناهمبند باشد ، گراف مکمل آن G^c ، همبند است .

- یک گراف دوبخشی است، اگر و تنها اگر شامل هیچ دور فردی نباشد.

گراف خودمکمل: یک خودمکمل از گراف G، یک مکمل از گراف G است به روی خودش.

همبندی: یک گراف را همبندی گوییم، اگر و تنها اگر نسبت به خودش یکریخت باشد و هیچ گراف دیگری وجود نداشته باشد که با گراف G یکریخت باشد.

گراف یالی: با L(G) نشان می‌دهیم. مجموعه رأس‌های L(G) با تعداد یال‌های G برابر است. و دو رأس در L(G) را به هم وصل می‌کنیم اگر یال‌های متناظرش در G با یکدیگر مجاور باشند.

نکات: - گراف یالی ساده G یک مسیر است، اگر و تنها اگر G یک مسیر باشد.

- اگر گراف‌های ساده G_1 و G_2 یکریخت باشند، L(G) و $L(G_2)$ نیز یکریختند.

- اگر G یک گراف یالی باشد، آنگاه $K_{1,3}$ یک زیرگراف ممنوعه است.

گراف های جهت دار :

$d^+(v)$ ← یال های خارج شده از رأس v

$d^-(v)$ ← " " وارده به رأس v

$$\sum d^+(v) = \sum d^-(v) = m(D)$$

گشت جهت دار : یک دنباله متوالی از گره ها و یالهای جهت دار که این دنباله از یک گره آغاز و به یک گره دیگر پایان می یابد

مسیر جهت دار : یک گشت جهت دار که گره تکراری نداشته باشد .

گره v را قابل دسترس از u می نامیم اگر مسیری جهت دار از u به v وجود داشته باشد .

- دی همبند : دو گره گراف D را می نامیم هرگاه حداقل یک یال بین آنها وجود داشته باشد (جهت دار) .

قویاً همبند : اگر دو گره همبند باشند ، هرکدام از دیگری قابل دسترس باشد .

ساده : گراف زمینه آن ساده باشد .

گراف متقارن : به ازای هر دو گره u و v ، یالهای $\overrightarrow{uv}$ و $\overrightarrow{vu}$ وجود داشته باشد .

گراف تورنمنت : گراف زمینه آن کامل باشد .

همبندی :

برش رأسی : زیر مجموعه V' از مجموعه رأس‌های $V(G)$ در گراف همبند G را برش رأسی می‌گوئیم، اگر $G-V'$ ناهمبند باشد.

هرگاه به تعداد اعضای V' ، $k=V'$ باشد و $k=|V'|$ ، V' را مجموعه جداساز از رأس‌های G می‌نامیم.

برش یالی : زیر مجموعه E' از مجموعه یالهای $E(G)$ در گراف همبند G را برش یالی گوئیم، هرگاه $G-E'$ ناهمبند باشد. آنگاه برش k یالی می‌نامیم.

هرگاه شمار اعضای E' برابر k باشد $|E'|=k$ ، مجموعه جداساز از یالهای G.

- اگر uv یک یال از برش یالی E' باشد، آن گاه همه یالهایی که u و v گره‌های پایانی آن است نیز به E' تعلق دارند. یعنی یالهای موازی با uv نیز همه عضو E' هستند.

- هیچ طوقه‌ای به برش یالی تعلق ندارد.

گراف ناهمبند : گرافی که بیش از یک یال دارد.

گراف بدیهی : گرافی که فقط یک یال دارد.

گذر اویلری: شامل همه یالهاست. ← شرطش یال تکراری نداشته باشد.

مسیر اویلری: یک گذر اویلری بسته است.

فراگیر: همه یالها طی شود

گذر فراگیر: همه یالها طی شود و یال تکراری اجازه شود.

مسیر اویلری: نقطهٔ آغاز و پایان گذر اویلری یکسان بود

گراف اویلری است اگر و تنها اگر هر یال G به تعداد فرد دور در G متعلق باشد.

قضیه: گراف همبند G گزاره‌های زیر معادل است.

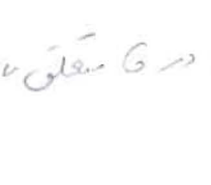
الف) G اویلری است

ب) درجه هر راس G عدد صحیح زوج است.

ج) G اجتماع دورهای مجزا یالی است

گراف همیلتونی: گراف G را همیلتونی نامیم، اگر دارای یک مسیر گسترده باشد، بطوریکه تمام رئوس در مسیر حرکت طی شوند. (دارای دور فراگیر باشد)

همیلتونی



ناهمیلتونی

- گراف G را ۲-همبند گوییم، اگر حداقل دو راس از گراف G حذف شود، گراف تبدیل به گراف ناهمبند شود.

ستاره گراف: با $CL(G)$ نشان می‌دهیم، یک ابرزیرگراف G از G است. که به صورت بازگشتی با وصل کردن زوج راس‌های نامجاور که مجموع درجه آنها حداقل n باشد، حاصل می‌شود. تا وقتی که چنین زوج هایی وجود نداشته باشد.

$d_G(v) + d_G(u) \geq n$

- اگر $CL(G)$ همیلتونی باشد، G همیلتونی است.

- اگر $CL(G)$ کامل باشد، ...

مکمل گراف :

$$|E(G)| + |E(G^c)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ دارای $m+n$ رأس، $m \times n$ یال است و درجه رئوس m یا n است.

خودمکمل : $G \cong G^c$

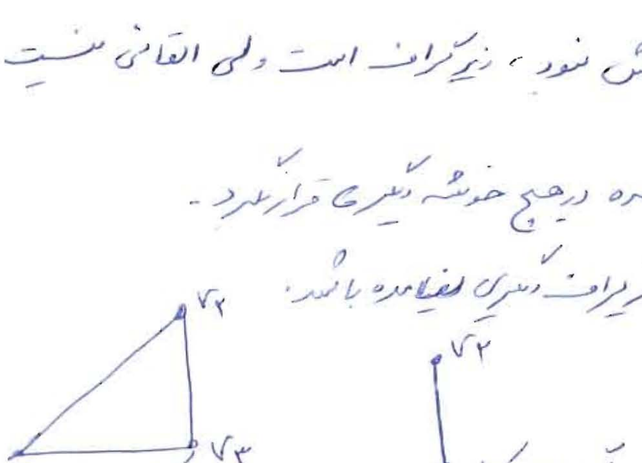
گراف H را زیرگراف G نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ ، $E(H) \subseteq E(G)$

زیرگراف فراگیر : وقتی همه رئوس G در زیرگراف H باشد.

زیرگراف القائی : زیرگرافی که اگر رأسی از G منتقل شود حتماً یال مربوط به آن هم در H باشد.

اگر رأس منتقل شود ولی یالش نشود، زیرگراف است ولی القائی نیست

خوشه ماکزیمال: یک خوشه G که به طور سره در هیچ خوشه دیگری از G قرار نگیرد.
منظور این است که یکی که جدا شده، دیگر در زیرگراف دیگری استفاده نشده باشد.



- مجموع درجه رأس های یک گراف مساوی دو برابر تعداد یالهای آن است.
- تعداد ~~...~~ رئوس های درجه فرد، زوج می باشد.

- در یک گراف یالی اگر گراف مورد نظر هر چند تا یال داشت به اندازه آن باید گراف یالی رأس داشته باشد. و به تعداد دو برابر رأس هایش، یال داشته باشد

- عدد استقلال رأسی هم عدد ثابت است ← $\alpha(G)$