بسم الله الرحمن الرحیم

جزوهٔ کلاسی

معادلات دیفرانسیل (قسمت اول)

دانشکدهٔ فنی (استاد نیسی) – واحد تهران جنوب

تهیه کننده :

حامد مظاهری

شما هم میتوانید مقالات خود را به ما ارسال کنید تا با نام شما در سایت قرار داده شود

Hamed.Mazaheri@Gmail.com

نام جزوه :

معادلات دیفرانسیل

استاد : نیسی

تهیه کننده : حامد مظاهری

۱

«معادلات دیفرانسیل»

هر معادله به شکل $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}) = 0$ یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n ام نام دارد.

$$y^{n} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

مثال: $y' - 3xy + 4x^3 = 0$ ، $y^3 + 4xy^2 - y' = 0$

* مرتبهٔ معادله = بزرگترین مرتبهٔ مشتق

درجهٔ معادله = درجهٔ بزرگترین مرتبهٔ مشتق

$(y'')^2 + 3x(y')^5 - y = 0$ درجهٔ ۲ ، مرتبهٔ ۲

$y^{(3)} - 4xy' - (y')^4 = 0$ مرتبهٔ ۳ ، درجهٔ ۱

$(y^{(4)})^5 + y - y'' = 0$ مرتبهٔ ۴ ، درجهٔ ۵

معادلهٔ خطی: معادلهٔ مرتبهٔ n ام خطی معادله‌ای به شکل زیر است:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = G(x)$$

$a(x)$ تابعی برحسب x می‌باشد.

مثال: $(x^3+1)y'' + 4xy' - y = e^x$ خطی - مرتبهٔ ۲ - درجهٔ ۱

$y^2 + 4xyy' - y = 0 \longrightarrow y + 4xy' - 1 = 0$ خطی - درجهٔ ۱ مرتبهٔ ۱

$y^3 + 4xy'y - y^2 = 0 \longrightarrow y^2 + 4xy - y = 0$

به دلیل وجود y^2 غیرخطی است.

جواب یک معادله: معادلهٔ $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ مفروض است. تابع $\varphi(x)$ جواب معادله است، هرگاه در معادله صدق کند. یعنی:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

واحد تهران جنوب - دانشکده فنی (ناصر شفاهی)

ثابت اساسی: ثابت های $c_1, c_2, \ldots, c_n$ در یک تابع اساسی می باشند، با شرط اینکه هرگاه قادر به تحلیل آنها باشیم. به عبارت دیگر نتوان تابع را ساده نمود، به شکلی که تعداد ثابت ها کم شود.

مثال: $y = c_1 e^x + c_2 e^x + c_3 e^{x^3}$

$$= (c_1 + c_2) e^x + c_3 e^{x^3} = c_0 e^x + c_3 e^{x^3}$$

⇐ دو ثابت اساسی وجود دارد.

مثال: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

⇐ دو ثابت اساسی وجود دارد.

برای ساختن معادله دیفرانسیل به تعداد ثابت های اساسی از معادله مشتق می گیریم و ثابت ها را حذف می کنیم.

مثال: در هر مورد معادلهٔ دیفرانسیل مربوط تابع را به دست آورید.

i) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$$\begin{cases} y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ y'' = c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{cases} \longrightarrow \text{دستگاه ۲ معادله، ۲ مجهول}$$

که c_1 و c_2 مجهول هستند. پس از محاسبهٔ c_1 و c_2 آنها را در معادله قرار می دهیم (معادلهٔ i)

⇐ راه ساده تر حل این مسئله به شکل زیر است:

$$y'' = -(c_1 \sin x + c_2 \cos x) \Rightarrow y'' = -y \Rightarrow \boxed{y'' + y = 0}$$

روش کلی:

$$\begin{array}{r} \times \sin x \\ \times \cos x \end{array} \begin{cases} c_1 \cos x - c_2 \sin x = y' \\ -c_1 \sin x - c_2 \cos x = y'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 \sin x \cos x - c_2 \sin^2 x = y' \sin x \\ -c_1 \sin x \cos x - c_2 \cos^2 x = y'' \cos x \end{cases}$$

$$-c_2 = y'' \cos x + y' \sin x \longrightarrow \boxed{c_2 = -y'' \cos x - y' \sin x}$$

$$c_1\cos^2 x - c_2\sin x\cos x = y'\cos x$$
$$c_1\sin^2 x + c_2\sin x\cos x = -y''\sin x$$
$$c_1 = y'\cos x - y''\sin x$$

حال مقادیر c_1 و c_2 را در معادله اصلی قرار می‌دهیم.

$$y = y'\sin x\cos x - y''\sin^2 x - y''\cos^2 x - y'\sin x\cos x$$
$$y = -y''(\sin^2 x + \cos^2 x) = -y'' \Rightarrow y = -y''$$
$$\Rightarrow \boxed{y + y'' = 0}$$ دو ثابت

مثال: $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} \longrightarrow y = c_2e^x + c_3e^{-x}$

$$\begin{cases} y' = c_2e^x - c_3e^{-x} \\ y'' = c_2e^x + c_3e^{-x} \end{cases} \Rightarrow y'' = y \Rightarrow y'' - y = 0$$

مثال: $y = c_1x + c_2x^3$

$$\begin{cases} y' = c_1 + 3c_2x^2 \\ y'' = 6c_2x \end{cases} \longrightarrow c_2 = \frac{y''}{6x}$$
$$c_1 = y - \frac{1}{2}y''x$$
$$\Rightarrow y = \left(y - \frac{1}{2}y''x\right)x + \frac{y''}{6x}\times x^3$$
$$y = xy - \frac{1}{2}y''x^2 + \frac{1}{6}y''x^2 = xy - \frac{1}{3}y''x^2$$
$$\Rightarrow y + \frac{1}{3}y''x^2 = 0$$ خطی، مرتبهٔ دوم، درجهٔ دوم

مثال: $x^2 - y^2 = c^2$

$$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow yy' - x = 0$$ غیرخطی، مرتبهٔ ۱، درجهٔ ۱

تمرین: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{x^2}$

معادلات مرتبه اول:
ساده - تفکیک پذیر - همگن - شبه همگن - کامل - معادلاتی که با عامل انتگرال ساز حل می‌شوند - برنولی - ریکاتی - مرتبهٔ اول درجهٔ n

۱- معادلات ساده:

$y'=f_{(x)}$: صورت کلی

برای حل با توجه به رابطهٔ $y'=\frac{dy}{dx}$ از طرفین تساوی $dy=f_{(x)}dx$ انتگرال می‌گیریم تا به تابع منحنی برحسب x و y برسیم.

مثال: $y'=4x^2+5 \rightarrow dy=(4x^2+5)dx$

$$y=\int(4x^2+5)dx=\frac{4}{3}x^3+5x+c$$

$$\Rightarrow y=\frac{4}{3}x^3+5x+c$$

مثال: $y'=\cos 2x$

$$y=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

* تذکر: با نوشتن $y'=\frac{dy}{dx}$ و ساده کردن معادلهٔ مرتبهٔ اول می‌توان معادله را به شکل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ نوشت.

مثال: $2x^2y'+3y^3-4x=0$

$$2x^2\frac{dy}{dx}+(3y^3-4x)=0 \Rightarrow 2x^2dy+(3y^3-4x)dx=0$$

$$(\underbrace{3y^2-4x}_{P})dx+\underbrace{2x^2}_{Q}dy=0$$

۲) معادلات تفکیک پذیر:

تابع $u=F(x,y)$ را تفکیک پذیر نامیم هرگاه قابل تجزیه به حاصل ضرب دو تابع جدا برحسب x, y باشد. یعنی:

$$F(x,y)=f_{(x)}\cdot g_{(y)}$$

مثال: $F(x,y)=x^2y+ye^x=y(x^2+e^x)$

$F(x,y)=x+y+2$ تفکیک‌پذیر نمی‌باشد

تعریف: معادله $Pdx+Qdy=0$ تفکیک‌پذیر است، هرگاه P و Q تقریبی هر یک تفکیک‌پذیر باشند. یعنی:

$$P=f(x)\cdot g(y)$$
$$Q=F(x)\cdot G(y)$$

روش حل: $f(x)\cdot g(y)\,dx+F(x)\,G(y)\,dy=0$

$$f(x)g(y)\,dx=-F(x)\,G(y)\,dy \Rightarrow \frac{f(x)}{F(x)}dx=\frac{-G(y)}{g(y)}dy$$

پس از این از طرفین انتگرال می‌گیریم.

مثال: $(1-x)y'=y^2$

$$\Rightarrow (1-x)\frac{dy}{dx}=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{1-x}$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{dx}{1-x} \Rightarrow \frac{-1}{y}+c=-\ln|1-x|$$ ← تا اینجا برای امتحان کافی است.

$$\ln|1-x|=\frac{1}{y}+2 \Rightarrow |1-x|=e^{\frac{1}{y}+2}=e^{\frac{1}{y}}\cdot \underbrace{e^2}_{K}$$

$$|1-x|=Ke^{1/y} \Rightarrow 1-x=\pm Ke^{1/y}$$

$$\boxed{x=1\pm Ke^{1/y}}$$

مثال: $xy^3dx+e^{x^2}dy=0$

$$xy^3dx=-e^{x^2}dy \Rightarrow xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{y^3}dy$$

$$\int xe^{-x^2}dx=\int-\frac{1}{y^3}dy=\int -y^{-3}dy$$

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c=\frac{-y^{-2}}{-2}=\frac{1}{2y^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{2}e^{-x^2}=c}$$

مثال: $(1+\ln x)dx+(1+\ln y)dy=0$

$$\Rightarrow (1+\ln x)dx=(-1-\ln y)dy$$

$$\int(1+\ln x)dx=\int(-1-\ln y)dy$$

$$x+x\ln x-x+c=[-y-(y\ln y-y)]$$

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} \qquad u=\ln x \longrightarrow v=x \qquad dv=dx \qquad du=\frac{1}{x}dx$$

$$uv-\int v\,du$$

$$=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+c$$

$$x\ln x+c=-y\ln y$$

$$\Rightarrow \boxed{x\ln x+y\ln y=c}$$

- معادلات همگن :

تعریف تابع همگن: $u=f(x,y)$ همگن درجه n می‌باشد هرگاه :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

مثال: در هر مورد همگن بودن را بررسی کنید:

۱) $f(x,y)=x^2y+y^3-3xy^2$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2\lambda y+\lambda^3y^3-3\lambda x.\lambda^2y^2=\lambda^3(x^2y+y^3-3xy^2)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3 f(x,y)$$ همگن درجه سوم

---

۲) $f(x,y)=x^5y+x^2y^4-1$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^6x^5y+\lambda^6x^2y^4-1=\lambda^6\left(x^5y+x^2y^4-\frac{1}{\lambda^6}\right)$$ غیرهمگن

۷

۳) $f(x,y) = x^3\sin\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{x^4}{y}e^{\frac{y}{x}}$

$f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^3x^3\sin\left(\frac{2\lambda y}{\lambda x}\right) + \frac{\lambda^4x^4}{\lambda y}e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$

$= \lambda^3\left[x^3\sin\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{x^4}{y}e^{\frac{y}{x}}\right] = \lambda^3 f(x,y)$ همگن درجهٔ سوم

---

۴) $f(x,y) = x^2y + 4x^3\sin y - y^3$

$f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^3x^2y + 4\lambda^3x^3\sin(\lambda y) - \lambda^3y^3$

$\lambda^3\left(x^2y + 4x^3\sin(\lambda y) - y^3\right)$ غیرهمگن

* در توابع مثلثاتی (نمایی) باید کمان (توان) به صورت توانی از $\frac{mx}{y}$ یا $\frac{my}{x}$

$$f(x,y) = xy\sin\left(\frac{y}{x}+1\right) + x^2$$

تعریف: معادلهٔ $Pdx+Qdy=0$ همگن است، هرگاه P و Q توابع همگن باشند.

روش حل:

پس از قرار دادن: $y = tx \rightarrow dy = tdx + xdt$

در معادله، به معادلهٔ تفکیک‌پذیر برحسب x و t می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم در نهایت به جای t از $\frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم.

۱) $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$

$y = tx \rightarrow dy = tdx + xdt$

$(x^2+t^2x^2)dx + x\,tx\,(tdx+xdt)$

$x^2\left[(1+t^2)dx + t\,(tdx+xdt)\right] = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = tx \Rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$ غ ق ق

$(1+t^2+t^2)dx + txdt = 0$

$(1+2t^2)dx = -txdt \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-tdt}{1+2t^2}$

8

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-t\,dt}{1+2t^2} \qquad \operatorname{Ln}|x| = -\frac{1}{4}\operatorname{Ln}\left|1+2t^2\right| + C$$

$$\operatorname{Ln}|x| = \operatorname{Ln}\left(1+2\frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{4}} + C \qquad t = \frac{y}{x}$$

$$|x| = e^{\operatorname{Ln}\left(\frac{x^2+2y^2}{x^2}\right)^{-1/4}+C} = \underbrace{K}_{e^C}\left(\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)^{1/4}$$

$$\boxed{e^{\operatorname{Ln}A} = A}$$

$$x = \pm K\sqrt[4]{\left(\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)}$$

حل:

$$\left(1+2e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$$

$$x = ty \qquad dx = t\,dy + y\,dt$$

$$(1+2e^t)(t\,dy + y\,dt) + 2e^t(1-t)\,dy = 0$$

$$(t+2te^t+2e^t-2te^t)\,dy + y(1+2e^t)\,dt = 0$$

$$(t+2e^t)\,dy = -y(1+2e^t)\,dt$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-(1+2e^t)}{t+2e^t}\,dt \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{(1+2e^t)}{t+2e^t}\,dt$$

$$\operatorname{Ln}|y| = -\operatorname{Ln}\left|t+2e^t\right| + C$$

$$t = \frac{x}{y} \qquad \Rightarrow \operatorname{Ln}|y| = \operatorname{Ln}\frac{1}{\left|\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}}\right|} + C$$

حل:

$$xy' = x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y$$

$$\left(x\sec\left(\frac{y}{x}\right)+y\right)dx - x\,dy = 0$$

$$y = tx \qquad dy = t\,dx + x\,dt$$

$$(\underline{x}\sec t + t\,\underline{x})\,dx - \underline{x}\,(t\,dx + x\,dt) = 0$$

$$(\sec t + t - t)\,dx - x\,dt = 0$$

انتگرال

$$\frac{1}{\cos t}\,dx = x\,dt \qquad \frac{dx}{x} = \cos t\,dt$$

$$Ln|x| = \sin t + c \Rightarrow \boxed{Ln|x| = \sin\frac{y}{x} + c}$$

$$x\,dy = y\cos\left(Ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx$$

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{xy}\,dx$$

---

* معادلاتی که به همگن تبدیل می‌شوند (شبه همگن):

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

$$(ax+by+c)\,dx + (a'x+b'y+c')\,dy = 0$$

روش حل:

الف)
$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}} \text{نقطه برخورد} \quad M\begin{vmatrix}\alpha \\ \beta\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = dX \\ dy = dY \end{matrix}$$

با قرار دادن در مسئله، مسئله به معادله همگن برحسب X و Y تبدیل می‌شود که آنرا حل می‌کنیم و سپس به جای X و Y مقدار را برحسب x و y قرار می‌دهیم.

ب)
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow ax+by = u$$

$$\Rightarrow a\,dx + b\,dy = du \Rightarrow \begin{cases} dy = \frac{1}{b}(du - a\,dx) \\ u = ax+by \end{cases}$$

با قرار دادن در مسئله به همگن یا تفکیک پذیر برحسب x و u تبدیل می‌شود که آنرا حل می‌کنیم.

مثال * $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \Rightarrow (x-y-6)\,dy = (x+y+4)\,dx$

$$(x+y+4)\,dx - (x-y-6)\,dy = 0$$

(15)

$$\begin{cases} x+y+4=0 \\ x-y-6=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2x-2=0 & \Rightarrow & x=1 \\ 1-y-6=0 & \Rightarrow & y=-5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=X+1 & dx=dX \\ y=Y-5 & dy=dY \end{cases}$$

$$(X+1+Y-5+4)\,dX-(X+1-Y+5-6)\,dY=0$$

$$(X+Y)\,dX-(X-Y)\,dY=0$$ همگن درجه اول

$$Y=tX \qquad dY=t\,dX+X\,dt$$

$$(X+tX)\,dX-\underbrace{(X-tX)}_{-X(1-t)}(t\,dX+X\,dt)=0$$

$$(1+t-t+t^2)\,dX-(1-t)X\,dt=0$$

$$(1+t^2)\,dX-(1-t)X\,dt=0$$

$$(1+t^2)\,dX=(1-t)X\,dt \Rightarrow \frac{dX}{X}=\frac{1-t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int\frac{dX}{X}=\mathrm{Ln}|X|$$

$$\int\frac{1-t}{1+t^2}\,dt=\mathrm{Arctan}\,t-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|1+t^2|$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}|X|=\mathrm{Arctan}\,t-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|1+t^2|+c$$

$$t=\frac{Y}{X}=\frac{y+5}{x-1}$$

$$\mathrm{Ln}|x-1|=\mathrm{Arctan}\left(\frac{y+5}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right)+c$$

*** مثال : $(x-2\tan y+3)\,dx+(2x+4\tan y-3)\sec^2 y\,dy=0$

$$u=\tan y \longrightarrow du=\sec^2 y\,dy$$

$$(x-2u+3)\,dx+(2x+4u-3)\,du=0$$

(۱۱)

$$\times ۲\begin{cases} x-۲u+۳=۰ \\ ۲x+۴u-۳=۰ \end{cases} \qquad ۴x+۶-۳=۰ \qquad x=\boxed{-\frac{۳}{۴}}\ \alpha$$

$$-\frac{۳}{۴}-۲u+۳=۰ \qquad ۲u=۳-\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

$$u=\boxed{\frac{۹}{۸}}\ \beta$$

$$\begin{cases} x=X+\alpha & dx=dX \\ u=U+\beta & du=dU \end{cases}$$

$$(X-۲U)dX+(۲X+۴U)\,dU=۰$$

$$U=tX \to (X-۲tX)dX+(۲X+۴tX)\,(tdX+Xdt)=۰$$

$$(۱-۲t)\,dX+(۲+۴t)\,(tdX+X\,dt)=۰$$

$$(۱-\cancel{۲t}+\cancel{۲t}+۴t^۲)\,dX+X(۲+۴t)dt=۰$$

$$(۱+۴t^۲)dX=-X\,(۲+۴t)dt$$

$$\frac{dX}{X}=\frac{-(۲+۴t)}{۱+۴t^۲}dt \longrightarrow \int\frac{du}{a^۲+u^۲}=\frac{۱}{a}\,Arctg\,\frac{u}{a}+c$$

$$Ln|X|=-۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times Arc\tan(۲t)-\frac{۱}{۲}Ln\left|۱+۴t^۲\right|+c$$

به دلیل $dU=۲dt$

$$U=۲t \quad\Rightarrow\quad dU=cdt \qquad t=\frac{U}{X}=\frac{u-\frac{۹}{۸}}{x+\frac{۳}{۴}}=\frac{\tan y-\frac{۹}{۸}}{x+\frac{۳}{۴}}$$

مثال: $(x+y+۱)\,dx+(۲x+۲y+۳)\,dy=۰$

$$\begin{matrix} x+y+۱=۰ \\ ۲x+۲y+۳=۰ \end{matrix} \longrightarrow \ ^{۱}\!/_{۲}=\ ^{۱}\!/_{۲} \quad\longrightarrow$$ موازی

$$u=x+y \longrightarrow du=dx+dy \Rightarrow dy=du-dx$$

$$(u+۱)dx+(۲u+۳)\,(du-dx)=۰$$

$$(u+۱-۲u-۳)\,dx+(۲u+۳)\,du=۰$$

$$(-u-۲)dx=-(۲u+۳)du$$

$$dx=\frac{۲u+۳}{u+۲}du \longrightarrow \quad t=u+۲ \quad du=dt \quad u=t-۲$$

$$dx=\frac{۲(t-۲)+۳}{t}dt=\left(۲-\frac{۱}{t}\right)dt$$

۱۲

$$x + c = ۲t - \ln|t|$$

$$t = u + ۲ = x + y + ۲$$

$$x + c = ۲(x + y + ۲) - \ln|x + y + ۲|$$

معادله کامل :

یادآوری : دیفرانسیل کامل

$u = f(x,y,z)$

$du = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ du را دیفرانسیل کامل u می‌نامیم .

مثال: $u = x^2y^3 + e^{z^2}$ $du = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy + 2ze^{z^2}dz$

$u \longrightarrow du$

$u = f(x,y)$ $du = f_x dx + f_y dy$

$u = x^3y^4 + y^2 + x^2$ $du = (\underbrace{3x^2y^4 + 2x}_{P})dx + (\underbrace{4x^3y^3 + 2y}_{Q})dy$

$P_y = 12x^2y^3$ $Q_x = 12x^2y^3$

$P_y = Q_x \longrightarrow$ کامل است

عبارت $A = Pdx + Qdy$ کامل است هرگاه $P_y = Q_x$

یعنی تابع u وجود دارد به قسمی که $du = Pdx + Qdy$

* برای به دست آوردن u ، $\int Pdx$ و $\int Qdy$ را حساب کرده ، جملات مشترک را یکبار و غیرمشترک را یک مرتبه می‌نویسیم .

مثال: ابتدا کامل بودن را بررسی کنید سپس u را به دست آورید .

$A = (2xe^y + 3x^2)dx + (x^2e^y - 2y)dy$

$P_y = 2xe^y$ $Q_x = 2xe^y \longrightarrow$ کامل

$\int 2xe^y + 3x^2 dx = x^2e^y + x^3$, $\int x^2e^y - 2y\,dy = x^2e^y - y^2$

$\boxed{u = x^2e^y + x^3 - y^2}$

تعریف: معادله $Pdx + Qdy = 0$ کامل است هرگاه $P_y = Q_x$. برای حل $\int Pdx$ و $\int Qdy$ را حساب کرده . جمع جملات مشترک و غیرمشترک را برابر C قرار می‌دهیم .

مثال: در هر مورد کامل بودن معادله را بررسی کنید ، سپس معادله را حل کنید .

$-y' = \frac{y\cos x + \sin y + y}{\sin x + x\cos y + x} = \frac{-dy}{dx}$

$$(y\cos x+\sin y+y)\,dx+(\sin x+x\cos y+x)\,dy=0 \qquad P_y=Q_x$$

$$\int (y\cos x+\sin y+y)\,dx = y\sin x+x\sin y+xy$$

$$\int (\sin x+x\cos y+x)\,dy = y\sin x+x\sin y+xy$$

جواب $\Rightarrow \boxed{y\sin x+x\sin y+xy=c}$

مثال:
۳ص کتاب

$$(\cot g\, y+x^2)\,dx = x\,\operatorname{cosec}^2 y\,dy$$

$$(\cot g\, y+x^2)\,dx - x\operatorname{cosec}^2 y\,dy=0 \qquad P_y=Q_x$$

$$\int \cot g\, y+x^2\,dx = x\cot g\, y+\frac{x^3}{3}$$

$$\int -x\operatorname{cosec}^2 y\,dy = x\cot g\, y \qquad \boxed{x\cot g\, y+\frac{x^3}{3}=c}$$

مثال:

$$(2x\sin 3y+3x^2)\,dx+(3x^2\cos 3y+2y)\,dy=0$$

$$u(x,y)=\int (2x\sin 3y+3x^2)\,dx+g(y) = x^2\sin 3y+x^3+\underbrace{g(y)}_{?}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q$$

از u نسبت به y مشتق گرفته برابر Q قرار می‌دهیم.

$$3x^2\cancel{\cos 3y}+g'(y)=3x^2\cancel{\cos 3y}+2y \quad\Rightarrow g'(y)=2y$$

$$\Rightarrow g(y)=y^2$$

$$\Rightarrow u= x^2\sin 3y+x^3+y^2$$

جواب $\boxed{x^2\sin 3y+x^3+y^2=c}$

تذکر: در مثال زیر با نوشتن دیفرانسیل کامل، به یک معادلهٔ کامل می‌رسیم. اگر از معادله عبارت $2x^2y^2$ فاکتور گرفته شود، به معادله‌ای می‌رسیم که کامل نمی‌باشد. ولی این معادله با ضرب در $2x^2y^2$ کامل می‌شود.

$u = x^3y^2 + 4x^5y^3 = 0 \quad \Rightarrow du = 0$

$(3x^2y^2 + 20x^4y^3)dx + (2x^3y^2 + 12x^5y^2)dy = 0$ کامل $P_y = Q_x$

$2(x^2y^2)\left[(3 + 10x^2y)dx + (x + 6x^3)dy\right] = 0$ غیرکامل

* حل معادلات به کمک عامل انتگرال ساز:

معادله غیرکامل $Pdx + Qdy = 0$ مفروض است ($P_y \neq Q_x$ غیر کامل). هدف مشخص کردن تابعی مانند $\mu = \mu(x,y)$ است که با ضرب این تابع در معادله، معادله به کامل تبدیل شود.

$\Rightarrow \mu(Pdx + Qdy) = 0 \quad \Rightarrow \mu Pdx + \mu Qdy = 0$ کامل

(عامل انتگرال ساز، همان عامل ناکته گرفته شده در محاسبه کد قبلی می باشد). برای محاسبه عامل μ حالات زیر عنوان می شود.

الف) $\dfrac{M_y - N_x}{N} = f_{(x)} \quad , \quad \mu = e^{\int f(x)dx}$

ب) $\dfrac{M_y - N_x}{M} = g(y) \quad , \quad \mu = e^{-\int g(y)dy}$

پ) $yf_1(x,y)dx + xf_2(xy)dy = 0$ ← اگر معادله به صورت روبرو باشد

$$\mu_{(x,y)} = \frac{1}{xy\left[f_1(xy) - f_2(xy)\right]}$$

ت) $y(Kx^ay^b + Lx^cy^d)dx + x(K'x^ay^b + L'x^cy^d)dy = 0$ اگر معادله به شکل

باشد، دارای عاملی به شکل $\mu = x^\alpha y^\beta$ می باشد که α و β را به دست می آوریم.

ث) $\dfrac{M_y - N_x}{2(xN - yM)} = f(x^2 + y^2) \qquad \mu_{(z)} = e^{\int f(z)dz} \qquad z = x^2 + y^2$

ج) $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = f(xy) \qquad \mu_{(z)} = e^{\int f(z)dz} \qquad z = xy$

چ) $\dfrac{y^2(M_y - N_x)}{xM + yN} = f\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \mu_{(z)} = e^{\int f(z)dz} \qquad z = \frac{x}{y}$

ح) $\dfrac{x^2(M_y-N_x)}{xM+yN}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\qquad \mu_{(z)}=e^{-\int f(z)\,dz}$ $\qquad z=\dfrac{y}{x}$

خ) معادله کامل $Mdx+Ndy$ دارای عامل انتگرال ساز به شکل

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM+yN}$$

می باشد.

تذکر: پس از تعیین عامل انتگرال ساز، این عامل را در معادله ضرب کرده و معادله جدید را که کامل می باشد حل می کنیم.

مثال: هر یک از معادلات زیر را با استفاده از عامل انتگرال ساز حل کنید.

مثال ۵۴) $\underbrace{(3xe^y+2y)}_{M}dx+\underbrace{(x^2e^y+x)}_{N}dy=0$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{3xe^y+2-2xe^y-1}{x^2e^y+x}=\frac{xe^y+1}{x(xe^y+1)}=\frac{1}{x}=f_{(x)}$$

$$\mu_{(x)}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

در معادله ضرب می کنیم.

$(3x^2e^y+2xy)dx+(x^3e^y+x^2)dy=0$ کامل

$$\int(3x^2e^y+2xy)\,dx=x^3e^y+x^2y \qquad \int(x^3e^y+x^2)\,dy=x^3e^y+x^2$$

جواب $\boxed{x^3e^y+x^2y=c}$

مثال ۶۲) $(x^2+y^2+x)dx+xy\,dy=0$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{2y-y}{xy}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x} \qquad \mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$$

$$(x^3+xy^2+x^2)dx+x^2y\,dy=0$$

$$\int(x^3+xy^2+x^2)\,dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3} \qquad \int x^2y\,dy=\frac{x^2y^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}=c}$$

مثال 64) $(1-xy)\,y' + y^{2} + 3xy^{3} = 0$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$(y^{2}+3xy^{3})\,dx + (1-xy)\,dy = 0$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{2y + 9xy^{2} + y}{y^{2}+3xy^{3}} = \frac{\overbrace{9xy^{2}+3y}^{3y(1+3xy)}}{y^{2}(1+3xy)} = \frac{3}{y^{2}} = \frac{3}{y}$$

* در عامل انتگرال ساز قدر مطلق اثری ندارد.

$$\mu_{(y)} = e^{-\int g(y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3\operatorname{Ln} y} = e^{\operatorname{Ln}\frac{1}{y^{3}}} = \frac{1}{y^{3}}$$

معادله را بر y^{3} تقسیم می کنیم تا کامل شود.

$$\left(\frac{1}{y} + 3x\right)dx + \left(\frac{1}{y^{3}} - \frac{x}{y^{2}}\right)dy = 0$$

$$\int\left(\frac{1}{y}+3x\right)dx = \frac{x}{y} + \frac{3x^{2}}{2}$$

$$\int\left(\frac{1}{y^{3}} - \frac{x}{y^{2}}\right)dy = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{x}{y} = \frac{-1}{2y^{2}} + \frac{x}{y}$$

جواب $\boxed{\frac{x}{y} + \frac{3x^{2}}{2} - \frac{1}{2y^{2}} = C}$

زمانی از روش زیر را استفاده می شود که:

* چندجمله ای باشد.

* جمع توان های متناظر با هم برابر است

مثال) $(4x^{2}y^{3} + 5x^{3}y^{5})\,dx + (3x^{3}y^{2} + 4x^{4}y^{4})\,dy = 0$

$$\mu = x^{\alpha}y^{\beta}\Big(\underbrace{4x^{\alpha+2}y^{\beta+3} + 5x^{\alpha+3}y^{\beta+5}}_{M}\Big)dx + \Big(\underbrace{3x^{\alpha+3}y^{\beta+2} + 4x^{\alpha+4}y^{\beta+4}}_{N}\Big)dy = 0$$

$M_y = N_x$

$$4(\beta+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} + 5(\beta+5)x^{\alpha+3}y^{\beta+4} = 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} + 4(\alpha+4)x^{\alpha+3}y^{\beta+4}$$

$$\begin{cases} 4(\beta+3) = 3(\alpha+3) \\ 5(\beta+5) = 4(\alpha+4) \end{cases} \qquad \begin{matrix} 5 \\ -4 \end{matrix}\begin{cases} 4\beta - 3\alpha = -3 \\ 5\beta - 4\alpha - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20\beta - 15\alpha = -15 \\ -20\beta + 16\alpha = 36 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 36 - 15 = 21 \qquad \boxed{\alpha = 21}$$

$$4\beta - 3(21) = -3$$

$$4\beta = -3 + 63 = 60$$

$$\beta = 15$$

$\alpha = 21 \quad \beta = 15$

$$\boxed{\mu(x,y) = x^{21}y^{15}}$$

(18)

$$\left(4x^{23}y^{18}+5x^{24}y^{20}\right)dx+\left(3x^{24}y^{17}+4x^{25}y^{19}\right)dy=0$$

$$\left(M_y=72x^{23}y^{17}+100x^{24}y^{19} \qquad N_x=72x^{23}y^{17}+100x^{24}y^{19}\right)$$

$$\int 4x^{23}y^{18}+5x^{24}y^{20}\,dx=\frac{4x^{24}}{24}y^{18}+\frac{5x^{25}}{5}y^{20}$$

$$\int\left(3x^{24}y^{17}+4x^{25}y^{19}\right)dy=\frac{x^{24}y^{18}}{6}+x^{25}y^{20}$$

$$\frac{1}{6}x^{24}y^{18}+x^{25}y^{20}=c$$

مثال: $(3x^2y^4+4x^3y^5)dx+(2x^3y^3+4x^4y^4)dy=0$

$$\mu=x^\alpha y^\beta$$

$$(\underbrace{3x^{\alpha+2}y^{\beta+4}+4x^{\alpha+3}y^{\beta+5}}_{M})dx+(\underbrace{2x^{\alpha+3}y^{\beta+3}+4x^{\alpha+4}y^{\beta+4}}_{N})dy=0$$

$$M_y=N_x$$

$$3(\beta+4)x^{\alpha+2}y^{\beta+3}+4(\beta+5)x^{\alpha+3}y^{\beta+4}=2(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+3}+4(\alpha+4)x^{\alpha+3}y^{\beta+4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3(\beta+4)=2(\alpha+3)\\4(\beta+5)=4(\alpha+4)\end{cases}\qquad\begin{cases}3\beta+12=2\alpha+6\\\beta+5=\alpha+4\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}3\beta+12=2\alpha+6\\-2\beta-10=-2\alpha-8\\\hline\beta+2=-2\end{array}\Rightarrow\beta=-4$$

$$-4+5=\alpha+4\Rightarrow1=\alpha+4$$

$$\boxed{\alpha=-3}$$

$$\mu(x,y)=x^{-3}y^{-4}=\frac{1}{x^3y^4}$$

معادله را بر x^3y^4 تقسیم می‌کنیم.

$$(\underbrace{\frac{3}{x}+4y}_{M})dx+(\underbrace{\frac{2}{y}+4x}_{N})dy=0$$

$$M_y=4\qquad N_x=4\qquad\checkmark$$

$$\int\frac{3}{x}+4y\,dx=3\,Ln\,x+4xy$$

$$\int\frac{2}{y}+4x\,dy=2\,Ln\,y+4xy$$

$$3\,Ln\,x+2\,Ln\,y+4xy=c$$

تمرین: $(2x^2y^3+5xy)dx+(4x^3y^2-x^2)dy=0$

مثال: $(x^2y^3+2y)dx+(2x-2x^3y^2)dy=0$

$$\Rightarrow y\underbrace{(x^2y^2+2)}_{f}dx+x\underbrace{(2-2x^2y^2)}_{g}dy=0$$

$$f(xy)=f(t)=t^2+2\qquad\mu=\frac{1}{xy(f-g)}=\frac{1}{xy(x^2y^2+2-2+2x^2y^2)}=\frac{1}{xy\cdot3x^2y^2}$$

$$=\frac{1}{3x^3y^3}$$

طرفین را بر $3x^3y^3$ تقسیم می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{x^3y^2}\right)dx+\left(\frac{2}{3x^2y^3}-\frac{2}{3y}\right)dy=0$$

$$M_y=\frac{2}{3}\times\frac{1}{x^3}\times\frac{-2}{y^3} \qquad N_x=\frac{2}{3}\times\frac{1}{y^3}\times\frac{-2}{x^3} \checkmark$$

$$\int \frac{1}{3}\times\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{y^2}\times\frac{1}{x^3}\,dx=\frac{1}{3}\operatorname{Ln}x+\frac{2}{3y^2}\times\frac{x^{-2}}{-2}$$

$$\int \frac{2}{3x^2}\times\frac{1}{y^3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{y}\,dy=\frac{2}{3x^2}\times\frac{y^{-2}}{-2}-\frac{2}{3}\operatorname{Ln}y$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\operatorname{Ln}x-\frac{2}{3}\operatorname{Ln}y-\frac{1}{3x^2y^2}=c}$$

معادلات خطی مرتبهٔ اول:

فرم کلی $\quad a_1(x)y'+a_0(x)y=G(x)$

$$\hookrightarrow y'+P(x)y=q(x)$$

$$\mu_{(x)}=e^{\int P(x)dx}$$

جواب عمومی $\longrightarrow$ $\boxed{y=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\cdot q(x)\,dx+c\right)}$

تذکر: معادله نسبت به x:

$$x'+P(y)x=q(y)$$

$$\mu(y)=e^{\int P(y)dy}$$

$$x=\frac{1}{\mu(y)}\left(\int \mu(y)\cdot q(y)\,dy+c\right)$$

مثال: هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

$$x^2y'-2xy=1$$

$$\underbrace{y'-\frac{2}{x}}_{P}y=\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{q} \qquad \text{خطی}$$

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\operatorname{Ln}x}=\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\cdot q(x)\,dx+c\right)$$

$$y=x^2\left(\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}dx+c\right)=x^2\left(\int \frac{1}{x^4}dx+c\right)=x^2\left(\frac{x^{-3}}{-3}+c\right)$$

۲۱

مثال : $y' + y\,tg\,x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\xrightarrow{\text{فرم دیگر ساده نشدهٔ سؤال}}$ $y'\cot g\,x + y = \dfrac{1}{\sin x}$

$$\mu_{(x)} = e^{\int tg\,x\,dx} = e^{-\operatorname{Ln}\cos x} = e^{\operatorname{Ln}\frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left(\int \mu_{(x)} \cdot q_{(x)}\,dx + c\right)$$

$$= \cos x\left(\int \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx + c\right)$$

$$y = \cos x\,(tg\,x + c)$$

$$\int \sec x\,dx = \operatorname{Ln}|\sec x + tg\,x|$$

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\operatorname{Ln}|\operatorname{cosec} x + tg\,x|$$

$$\int tg\,x\,dx = -\operatorname{Ln}\cos x$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot g\,x$$

$$\int \cot g\,x\,dx = \operatorname{Ln}\sin x$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x$$

مثال : $(1+y^2) - (\operatorname{Arc}tg\,y - x)\,y'$

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$$

$$\Rightarrow (1+y^2) = (\operatorname{Arc}tg\,y - x)\frac{1}{x'}$$

$$x'(1+y^2) = \operatorname{Arc}tg\,y - x$$

$$x' = \frac{\operatorname{arc}tg\,y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2} \Rightarrow x' + \frac{1}{1+y^2}\,x = \frac{\operatorname{arc}tg\,y}{1+y^2}$$

$\longrightarrow$ خطی برحسب x

۸۳ صفحه ۵۵) $y + y'\operatorname{Ln}^2 y = (x + 2\operatorname{Ln} y)\,y'$

تمرین $\left(\dfrac{x}{y} - \sin y\right)dy + dx = 0$

* معادلاتی که به خطی مرتبهٔ اول تبدیل می‌شوند :

۱) معادله به شکل $f'_{(y)}\,y + a_1(x)\,f_{(y)} = G(x)$

حل : با فرض $V = f(y)$ معادله به خطی مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود (تغییر متغیر)

این روش زمانی کاربرد دارد که مشتق عباراتی که به عنوان متغیر جدید انتخاب می‌شود، در داخل معادله باشد.

مثال:

1) $x^2 y' \cos y = 2x \sin y - 1$ حل: $u = \sin y$

2) $x^2 \cdot \frac{y'}{y} = 2x \operatorname{Ln} y - 1$ حل: $u = \operatorname{Ln} y$

مثال ۴۷ $xy' = y + \frac{x^5 e^x}{4y^3} \longrightarrow x\,4y^3 y' = 4y^4 + x^5 e^x$

مثال ۴۹ $y y' = x^2 + \frac{1}{x} y^2$ $u = y^2$

حل ۱) $u = \sin y$ $u' = y' \cos y$

$\Rightarrow x^2 u' = 2xu - 1 \Rightarrow u' = \frac{2}{x} u - \frac{1}{x^2}$

$u' - \frac{2}{x} u = -\frac{1}{x^2}$ $\mu_{(x)} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$

$u = x^2 \left(\int \frac{1}{x^2} \cdot -\frac{1}{x^2} dx + c \right) = x^2 \left(-\frac{x^{-3}}{-3} + c \right) = x^2 \left(\frac{1}{3x^3} + c \right)$

$u = x^2 \left(\frac{1}{3x^3} + c \right) \Rightarrow \boxed{\sin y = x^2 \left(\frac{1}{3y^3} + c \right)}$

۲) معادلهٔ برنولی

فرم کلی: $y' + P(x) y = q(x) y^n$

حل: با استفاده از تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ معادله به خطی مرتبه اول برحسب z تبدیل می‌شود که آنرا حل می‌کنیم.

مثال: $xy' - \frac{y}{2 \operatorname{Ln} x} = y^2 \longrightarrow y' - \frac{y}{2x \operatorname{Ln} x} = \frac{1}{x} y^2$

$n = 2$ $y^{1-n} = z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$ $z' = -y' y^{-2} = \frac{-y'}{y^2} \Rightarrow \boxed{y' = -y^2 z'}$

$-y^2 z' - \frac{y}{2x \operatorname{Ln} x} = \frac{1}{x} y^2 \xrightarrow{\div -y^2}$

$z' + \frac{1}{2x \operatorname{Ln} x} \overbrace{\left(\frac{1}{y}\right)}^{z} = \frac{-1}{x} \Rightarrow z' + \frac{1}{2x \operatorname{Ln} x} z = \frac{-1}{x}$ خطی

$\mu_{(x)} = e^{\int \frac{1}{2x \operatorname{Ln} x} dx} = e^{\int \frac{du}{2u}} = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Ln} u} = e^{\operatorname{Ln} \sqrt{u}} = e^{\operatorname{Ln} \sqrt{\operatorname{Ln} x}} = \sqrt{\operatorname{Ln} x}$

$u = \operatorname{Ln} x$

$u' = \frac{1}{x}$

$$z=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\, q(x)\, dx + c\right) \qquad \int -\sqrt{u}\, du$$

$$\frac{1}{\sqrt{Lnx}}\left(\sqrt{Lnx}\,-\frac{1}{x}dx+c\right)=\frac{1}{\sqrt{Lnx}}\left(-\frac{(Lnx)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c\right)=z$$

$$z=\frac{1}{y}$$

۹۵ سری دوم

$$** \quad xy'+y=(2yx^2 Lny)\,y' \qquad y'=\frac{1}{x'}$$

$$\frac{x}{x'}+y=(2yx^2Lny)\frac{1}{x'} \xrightarrow{\times x'}$$

$$x+yx'=2yLny\,x^2 \longrightarrow x'+\frac{1}{y}x=2Lny\,x^{2}$$

$$z=x^{1-n}=x^{1-2}=x^{-1} \qquad z'=-x'x^{-2}=\frac{-x'}{x^2}\Rightarrow$$

$$-x^2z'+\frac{1}{y}x=2Lny.x^2 \xrightarrow{\div -x^2} \qquad \boxed{x'=-x^2z'}$$

$$z'-\frac{1}{y}\times\frac{1}{x}=-2Lny \Rightarrow z'-\frac{1}{y}z=-2Lny$$

$$\mu(y)=e^{\int -\frac{1}{y}dy}=e^{-Lny}=e^{Ln\frac{1}{y}}\boxed{=\frac{1}{y}}$$

$$z=y\left(\int\frac{1}{y}(-2Lny)\,dy+c\right)\longrightarrow ?$$

تمرین: $\sin y\,(x+\sin y)\,dx+2x^2\cos y\,dy=0 \qquad \left(\begin{array}{l} V=\sin y \\ x \text{ برنولی} \end{array}\right)$

معادله ریکاتی: $\quad y'+f(x)y^2+q(x)y+h(x)=0$ فرم کلی

جواب خصوصی $y_1=y_1(x)$ با قراردادن $y=y_1+\frac{1}{z}$ و

محاسبه y' و قراردادن در مسئله، مسئله به معادله خطی مرتبه اول برحسب z و x تبدیل می‌شود که از راه حل آن استفاده می‌کنیم.

تذکر: درصورت معلوم نبودن y_1، جوابها $y=\pm x$ و $y=\pm\frac{1}{x}$ را آزمایش می‌کنیم (معمولاً جوابها به این شکل می‌باشند).

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۹۶۲ / ص۶۵

$$y'=2\,tg\,x\sec x-y^2\sin x \qquad y_1=\sec x$$

$$\to y'+\sin x\, y^2=2\,tg\,x\sec x$$

$$y=y_1+\frac{1}{z}\ \Rightarrow y=\sec x+\frac{1}{z}$$

$$y'=\sec x\, tg\, x-\frac{z'}{z^2}$$

$$\sec x\, tg\,x-\frac{z'}{z^2}+\sin x\left(\sec x+\frac{1}{z}\right)^2-2\,tg\,x\sec x=0$$

$$-\frac{z'}{z^2}+\sin x\left(\sec^2 x+\frac{1}{z^2}+2\sec x\cdot\frac{1}{z}\right)-tg\,x\sec x=0$$

$$-\frac{z'}{z^2}+\sin x\sec^2 x+\frac{1}{z^2}\sin x+2\sec x\sin x\frac{1}{z}-tg\,x\sec x=0$$

$$\frac{-z'}{z^2}+\cancel{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}+\frac{1}{z^2}\sin x+\frac{2\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{z}-\cancel{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=0 \qquad \times -z^2$$

$$z'-\sin x-2\,tg\,x\,z=0$$

$$z'-2\,tg\,x\,z=\sin x \qquad \text{خطی مرتبه اول برحسب } z$$

$$\mu_{(x)}=e^{-\int 2\,tg\,z\,dz}=e^{2\times-\ln\cos x}=e^{\ln\cos^2 x}=\cos^2 x$$

$$z=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\int\cos^2 x\sin x\,dx+c\right)=\frac{1}{\cos^2 x}\left(-\frac{\cos^3 x}{3}+c\right)$$

$$z=\frac{1}{\cos^3 x}\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x+c\right) \qquad y=\sec x+\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{z}=y-\sec x$$

$$z=\frac{1}{y-\sec x}$$

$$\boxed{\frac{1}{y-\sec x}=\frac{1}{\cos^2 x}\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x+c\right)}$$

- معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول درجهٔ n :

$$y'=P \longrightarrow P_n(x,y)P^n+P_{n-1}(x,y)P^{n-1}\cdots+P_1(x,y)P+P_0(x,y)=0$$

که با تبدیل ضریب P^n ($(y')^n$) به یک، معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$(y')^n+a_{n-1}(x,y)(y')^{n-1}+a_{n-2}(x,y)(y')^{n-2}+\cdots+a_1(x,y)y'+a_0(x,y)=0$$

مثال: $(y')^3+3xy(y')^2-4x^2y'=0$ و $(y')^5+4\sin x(y')^3=0$

حالات مختلف به شکل زیر است:

الف) معادله تجزیه شود:

$$(y'-f_1(x,y)).y'-(f_2(x,y))\cdots(y'-f_n(x,y))=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=f_1(x,y) \\ y'=f_2(x,y) \\ y^n=f_n(x,y) \end{cases} \xrightarrow[\text{حل می‌کنیم.}]{\text{هر یک از معادلات را}} \begin{matrix} \varphi_1(x,y,c)=0 \\ \varphi_2(x,y,c)=0 \\ \varphi_n(x,y,c)=0 \end{matrix}$$

جواب عمومی $\varphi_1(x,y,c).\varphi_2(x,y,c)\cdots\varphi_n(x,y,c)=0$

مثال ۱۰۵ ص ۵۶

$$(y-Px)(P-1)P=0 \qquad (P=y')$$

$$y-y'x=0 \rightarrow y'x=y \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y|=\ln|x|+c$$

$$\Rightarrow \ln|y|-\ln|x|+c=0$$

$$y'-1=0 \rightarrow y'=1 \rightarrow y=x+c \rightarrow y-x+c=0$$

$$y'=0 \rightarrow y=c \rightarrow y'-c=0$$

$$(y-c)(y-x+c)(\ln|y|-\ln|x|+c)=0$$

حل: $x^2p^2-2pxy+y^2=0$

$$(xp-y)^2=0 \Rightarrow xp-y=0 \rightarrow x\frac{dy}{dx}=y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \rightarrow \mathrm{Ln}|x|-\mathrm{Ln}|y|+c=0$$

حل ۱۰۲) ص ۵۶

$$\underset{a}{x^2}p^2-\underset{b}{\underbrace{2xy}}p+\underset{c}{\underbrace{2y^2-x^2}}=0$$

$$\Delta=b'^2-ac=x^2y^2-x^2(2y^2-x^2)=x^2y^2-2x^2y^2+x^4=\boxed{x^4-x^2y^2}$$

$$p=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{xy\pm\sqrt{x^4-x^2y^2}}{x^2}=\frac{xy\pm x\sqrt{x^2-y^2}}{x^2}$$

$$y'=\frac{y\pm\sqrt{x^2-y^2}}{x} \Rightarrow \begin{cases} ① \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x} \\ ② \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-\sqrt{x^2-y^2}}{x} \end{cases}$$

$$(y-\sqrt{x^2-y^2})dx-xdy=0$$ معادلهٔ همگن

$$y=tx \qquad dy=tdx+xdt$$

$$(tx-\sqrt{x^2-t^2x^2})dx-x(tdx+xdt)=0$$

$$(t-\sqrt{1+t^2})dx-tdx-xdt=0 \qquad -\sqrt{1-t^2}\,dx=xdt$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \mathrm{Ln}|x|=-\mathrm{Arc\,Sin}\,t+c$$

$$\boxed{\mathrm{Ln}|x|+\mathrm{Arc\,Sin}\left(\frac{y}{x}\right)+c=0} \qquad \varphi_1(x,y,c)=0$$

به روش مشابه φ_2 حساب می‌شود ...

$$\mathrm{Ln}|x|-\mathrm{Arc\,Sin}\left(\frac{y}{x}\right)+c=0$$

$$\left(\mathrm{Ln}|x|-\mathrm{Arc\,Sin}\left(\frac{y}{x}\right)+c\right).\left(\mathrm{Ln}|x|+\mathrm{Arc\,Sin}\left(\frac{y}{x}\right)+c\right)=0$$

ب) معادلاتی که نسبت به y قابل حل می باشند یعنی: $y=f(x,p)$

با مشتق گیری از طرفین نسبت به x معادله جدید به شکل $G(x,p,p')=0$ حاصل می شود

آن را حل می کنیم و به جواب $\varphi(x,p,c)=0$ می رسیم. از حذف p از دستگاه زیر جواب عمومی معادله به دست می آید:

$$\begin{cases}\varphi=(x,p,c)=0\\ y=f(x,p)\end{cases}$$

پ) معادلاتی که نسبت به x قابل حل می باشند. یعنی $x=f(y,p)$. با مشتق گیری از طرفین نسبت به y و نوشتن $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$ به معادله جدید $G(y,p,p')=0$ می رسیم که آن را حل می کنیم و به جواب $\varphi(y,p,c)=0$ می رسیم. جواب عمومی از حذف p از دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases}x=f(y,p)\\ \varphi(y,p,c)=0\end{cases}$$

مثال ۱۰۴ ص ۵۶

$$y=y'^2+xy'-x$$

$$y=p^2+px-x \longrightarrow \frac{dy}{dx}=2pp'+p+p'x-1$$

$$\cancel{p}=2pp'+\cancel{p}+p'x-1 \longrightarrow 2pp'+p'x-1=0$$

$$p'(2p+x)=1 \longrightarrow \underbrace{}_{M}dx-\underbrace{(2p+x)}_{N}dp=0 \qquad \text{غیر کامل}$$

$$\frac{M_p-N_x}{M}=\frac{0-(-1)}{1}=1=g(p) \Rightarrow \mu=e^{-\int g(p)dp}$$

$$\mu=e^{-\int 1dp}=e^{-p} \xrightarrow{\text{ضرب در دو طرف}} e^{-p}dx-(2p+x)e^{-p}dp=0$$

$$\int e^{-p}dx=xe^{-p}\int -2pe^{-p}-xe^{-p}dp=$$

$$=2pe^{-p}+2e^{-p}+xe^{-p}$$

$-2p+$	e^{-p}
-2	$-e^{-p}$
0	e^{-p}

جواب عمومی
$$\begin{cases}2pe^{-p}+2e^{-p}+xe^{-p}+c=0 \longleftarrow \text{p برحسب x و y جاگذاری در φ}\\ y=p^2+px-x \longrightarrow p^2+px-(x+y)=0 \longrightarrow\end{cases}$$

$$\Delta = x^2 + 4(1)(x+y) = x^2 + 4(x+y)$$

$$\begin{cases} p = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4y}}{2} \\ 2pe^{-p} + 2e^{-p} + xe^{-p} + c = 0 \end{cases}$$

شل ۱۰۳
ص ۵۶

$$x = y' \cdot \cos y' = p \cos p$$

$$\frac{dx}{dy} = p' \cos p - p\,p' \sin p \Rightarrow \frac{1}{p} = \underbrace{p'}_{\frac{dp}{dy}}(\cos p - p \sin p)$$

$$\Rightarrow dy = p(\cos p - p \sin p)\,dp = (p \cos p - p^2 \sin p)\,dp \quad //$$

تفکیک‌پذیر

$$y = \int p \cos p - p^2 \sin p \, dp \longrightarrow \begin{array}{c|c} p & \cos p \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} p^2 & \sin p \\ \hline & \end{array}$$

با استفاده از روش جزء به جزء $\longrightarrow$ ...

شل ۱۰۸
ص ۵۶
***

$$p = tg\left(x - \frac{p}{1-p^2}\right)$$

$$Arc\,tg\, p = x - \frac{p}{1+p^2} \Rightarrow x = Arc\,tg\, p + \frac{p}{1+p^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p'}{1+p^2} + \frac{p'(1+p^2) - 2pp' \cdot p}{(1+p^2)^2} = \frac{p'(1+p^2) + p' + p'p^2 - 2p'p^2}{(1+p^2)^2}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{p' + \cancel{p'p^2} + p' + \cancel{p'p^2} - \cancel{2p'p^2}}{(1+p^2)^2} = \frac{2p'}{(1+p^2)^2}$$

$$\longrightarrow dy = \frac{2p\,dp}{(1+p^2)^2} \qquad \int dy = \int \frac{2p\,dp}{(1+p^2)^2}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-1}{1+p^2} + c \\ x = \operatorname{Arctg} p + \dfrac{p}{1+p^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{را حذف می‌کنیم } p}$$

$$\frac{1}{1+p^2} = -y+c \rightarrow 1+p^2 = \frac{1}{-y+c}$$

$$p^2 = \frac{1}{-y+c} - 1 = \frac{1+y-c}{y+c}$$

$$p = \pm\sqrt{\frac{1-y-c}{-y+c}}$$

ث) معادلات کلرو (حالت خاص لاگرانژ):

صورت کلی معادله به صورت $y = px + f(p)$ می‌باشد.

$$\cancel{p} = \frac{dy}{dx} = \cancel{p} + p'x + p'f'(p) \Rightarrow p'\left(x + f'(p)\right) = 0$$

$$\frac{dp}{dx}\left[x + f'(p)\right] = 0 \qquad \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

$$x + f'(p) = 0 \rightarrow x = -f'(p)$$

$$p = c \Rightarrow \begin{cases} y = px + f(p) \\ p = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = cx + f(c)}$$

جواب عمومی:

اگر به جای x از $-f'_p$ استفاده می‌کنیم. x و y برحسب p حساب می‌شوند که جواب پارامتری نام دارد.

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

مثال: $y = x\underbrace{y'}_{f} + (\underbrace{3y'^2 + y'}_{f_p}) = px + (3p^2 + p)$ جواب عمومی و پارامتری را به دست آورید.

$$\boxed{y = cx + (3c^2 + c)} \quad \text{عمومی}$$

$$\text{پارامتری} \begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -p(6p+1) + (3p^2 + p) \end{cases}$$

ج) معادلهٔ لاگرانژ :

صورت کلی

$$y = f(p)\,x + g(p)$$

$$p = \frac{dy}{dx} = p' f'(p) \cdot x + f(p) + p' g'(p)$$

$$p - f(p) = p'\left[f'(p)\,x + g'(p)\right] \qquad p' = \frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = \frac{1}{x'}\left[f'(p)\,x + g'(p)\right] \qquad \frac{dx}{dp} = x'$$

$$x'\left(p - f(p)\right) = f'(p)\,x + g'(p)$$

$$x' = \frac{f'(p)}{p - f(p)}\,x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

حفظ شود.

$$\Rightarrow \quad \boxed{x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}\,x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}}$$

خطی مرتبه اول برحسب x و p

جواب $\boxed{x = \tau(p)}$

$$\begin{cases} y = f(p)\,x + g(p) \\ x = \tau(p) \end{cases}$$

p را از دستگاه مقابل حذف می‌کنیم تا جواب عمومی به دست آید.

* در صورت مشکل بودن حذف p ، جواب پارامتری به شکل زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} y = f(p) \cdot \tau(p) + g(p) \\ x = \tau(p) \end{cases}$$

(مثال ۱۰۷
ص ۵۶

$$y = xy'^{۲} + y'^{۳} = x\underbrace{p^{۲}}_{f} + \underbrace{p^{۳}}_{g}$$

حل:
$$x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)} \Rightarrow x' - \frac{۲p}{p - p^{۲}}x = \frac{۳p^{۲}}{p - p^{۲}}$$

$$\boxed{x' + \frac{۲}{p-۱}x = \frac{۳p}{۱-p}}$$

$$\mu(p) = e^{\int \frac{۲}{p-۱}dp} = e^{۲\ln(p-۱)} = e^{\ln(p-۱)^{۲}} = (p-۱)^{۲}$$

$$x = \frac{۱}{\mu(p)}\left(\int \mu(p)\cdot q(p)\,dp + c\right)$$

$$x = \frac{۱}{\mu(p)}\left(\int \cancel{(p-۱)^{۲}}^{\,۱-p}\frac{۳p}{\cancel{۱-p}}dp + c\right)$$

$$x = \frac{۱}{(p-۱)^{۲}}\left(\int ۳p - ۳p^{۲}dp + c\right) = \frac{۱}{(p-۱)^{۲}}\left(\frac{۳p^{۲}}{۲} - p^{۳} + c\right)$$

$$\begin{cases} y = xp^{۲} + p^{۳} \\ x = \dfrac{۱}{(p-۱)^{۲}}\left(\dfrac{۳p^{۲}}{۲} - p^{۳} + c\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{p^{۲}}{(p-۱)^{۲}}\left(\dfrac{۳p^{۲}}{۲} - p^{۳} + c\right) \\ x = \dfrac{۱}{(p-۱)^{۲}}\left(\dfrac{۳p^{۲}}{۲} - p^{۳} + c\right) \end{cases}$$

جواب پارامتری

- کاربردهای معادلات مرتبه اول :

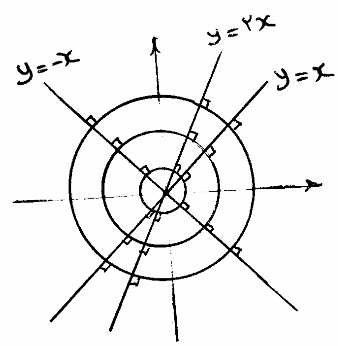
۱- مسیر متعامد :

خانواده $f(x,y,c)=0$ را یک مسیر متعامد برای خانواده $g(x,y,c)=0$ گوئیم، هرگاه:
هر منحنی f بر تمام منحنی‌های g عمود باشد و برعکس.

مثال :

$$x^2+y^2=c^2$$ ← معادله دایره

← خانواده دوایر به مرکز مبدا و شعاع c.



* واضح است که $y=cx$ مسیر متعامد می‌باشد.

* طریقه محاسبه مسیرهای متعامد :

ابتدا معادله دیفرانسیل نظیر f را به دست می‌آوریم. سپس بجای y' ، $\frac{-1}{y'}$ قرار می‌دهیم. سپس معادله جدید را حل می‌کنیم تا g به دست آید.

۱- مسیر متعامد $x^2+y^2=c^2$ را بیابید. : مثال

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ 2x+2yy'=0 \end{cases} \rightarrow x+yy'=0$$ معادله دیفرانسیل f

$$\xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}} x-\frac{y}{y'}=0$$ معادله دیفرانسیل نظیر g

$$\rightarrow x=\frac{x}{y'} \rightarrow y'=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \rightarrow \ln y=\ln x+\ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{y=cx}$$ مسیر متعامد

۲- مسیر متعامد $y=c(\sec x+\tan x)$ را بیابید.

$$\begin{cases} y=c(\sec x+\tan x) \\ y'=(\sec x\tan x+\sec^2 x)c \end{cases}$$

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{0-(-\sin x)}{\cos x\cdot\cos x}=\tan x\cdot\sec x$$

$$\frac{y}{y'}=\frac{\cancel{c}(\sec x+\tan x)}{\cancel{c}(\sec x\tan x+\sec^2 x)}=\frac{\cancel{\sec x+\tan x}}{\sec x\,(\cancel{\tan x+\sec x})}=\frac{1}{\sec x}$$

$$\Rightarrow y'=y\sec x$$ معادله دیفرانسیل f $\longrightarrow y'\to\frac{-1}{y'}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y'}=y\sec x$$ معادله دیفرانسیل نظیر g

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{y\sec x} \quad \text{تفکیک پذیر} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{y\sec x}$$

$$\int y\,dy = \int \frac{-dx}{\sec x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y^2}{2} = -\sin x + c}$$

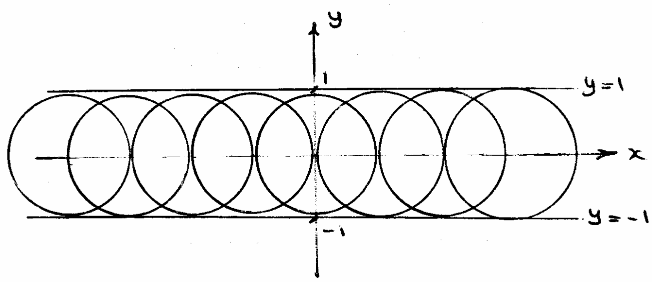
مسیر متعامد

۲- پوش منحنی :

پوش خانوادهٔ $F(x,y,c)=0$ منحنی است که بر تمام منحنی های F فقط در یک نقطه مماس باشد.

مثال : $(x-c)^2+y^2=1$ ← خانوادهٔ دایره ای به مرکز $(c,0)$ و شعاع 1

← واضح است که $y=1$ و $y=-1$ پوش های دسته منحنی می باشند.



* طریقه محاسبهٔ پوش (طریقهٔ محاسبهٔ جواب های ویژه از روی جواب عمومی) :

برای این کار، خانوادهٔ f و مشتق آن نسبت به c $\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)$ را در یک دستگاه قرار می دهیم.

سپس c را از این دستگاه حذف می کنیم.

- مثال : پوش خانوادهٔ $(x-c)^2+y^2=1$ را بیابید.

$$\begin{cases} (x-c)^2+y^2=1 \\ -2(x-c)=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x=c}$$

$$\xrightarrow[(c-c)^2+y^2=1]{x=c} y^2=1 \Rightarrow \boxed{y=\pm 1}$$ پوش منحنی

- مثال: پوش خانوادهٔ $y=\frac{x}{c}+c^2$ را بیابید.

$$\begin{cases} y=\frac{x}{c}+c^2 \\ 0=\frac{-x}{c^2}+2c \end{cases} \rightarrow \frac{x}{c^2}=2c \rightarrow x=2c^3$$

$$\Rightarrow c=\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{x}{\sqrt[3]{\frac{x}{2}}}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}}$$

فصل دوم - معادلات مرتبهٔ بالاتر از ۱ :

صورت کلی معادلهٔ مرتبهٔ دوم به شکل $F(x,y,y',y'')=0$ می باشد .

$y''+4y'-y=0$ و $x^2y''-xy'+cy=0$

$(1-x^2)y''-2xy'+3y=0$

همان‌طور که می دانیم برای تشکیل معادلهٔ دیفرانسیل به تعداد ثابت های اساسی مشتق می گیریم . بنابراین انتظار داریم که در جواب معادلات مرتبهٔ دوم ، ۲ ثابت ظاهر شود . در برخی موارد معادلات مرتبهٔ دوم با استفاده از تغییر متغیر مناسب به معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل می شود که عبارتند از :

↓

الف) معادله فاقد y باشد . یعنی : $F(x,y',y'')=0$

روش حل :

$z=y' \Rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dx}=z'$

$\Rightarrow F(x,z,z')=0$ مرتبهٔ اول

با حل مرتبهٔ اول z به دست می آید که نتیجه $z=y'=\frac{dy}{dx}$

$y=\int z\,dx$ بنابراین $dy=z\,dx$

مثال : $3y''+\frac{4}{x}y'+\ln x=0$

نوع : فاقد y $\quad y'=z \quad y''=z' \rightarrow 3z'+\frac{4}{x}z=-\ln x$

$\Rightarrow z'+\frac{4}{3x}z=-\frac{1}{3}\ln x$ خطی مرتبهٔ اول برحسب z و x

$\mu(x)=e^{\int\frac{4}{3x}dx}=e^{\frac{4}{3}\ln x}=x^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{x^4}$

$z=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\cdot q(x)\,dx+c\right)=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\left(\int x^{\frac{4}{3}}\cdot -\frac{1}{3}\ln x\,dx+c\right)$

$z=x^{-\frac{4}{3}}\left(-\frac{1}{3}\int x^{\frac{4}{3}}\cdot\underbrace{\ln x}_{u}\,dx+c\right)$ $\quad u=\ln x \quad du=\frac{dx}{x} \quad dv=x^{\frac{4}{3}}dx \quad V=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$

$\rightarrow z=x^{-\frac{4}{3}}\left(-\frac{1}{3}\left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\ln x-\int\frac{3}{7}x^{\frac{4}{3}}dx+c\right]\right. \quad x^{\frac{7}{3}}\times\frac{1}{x}=x^{\frac{4}{3}}$

۳۷

$$z = -\frac{1}{7} x^{\frac{4}{3}} \operatorname{Ln} x + \frac{1}{7} x^{-\frac{3}{3}} \times \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + c$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{7} x^{\frac{4}{3}} \operatorname{Ln} x + \frac{3}{49} x^{\frac{4}{3}} + c} \qquad z = y'$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{7} x^{\frac{4}{3}} \operatorname{Ln} x + \frac{3}{49} x^{\frac{4}{3}} + c\right) dx$$

$$= -\frac{1}{7}\left(\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \operatorname{Ln} x - \frac{3}{7}\int x^{\frac{4}{3}} dx\right) + \frac{3}{49} \times \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + \underline{\underline{c}}x + \underline{\underline{K}}$$

دو ثابت

مثال : $xy'' = y' \operatorname{Ln}\left(\frac{y'}{x}\right)$

$$xz' = z \operatorname{Ln}\left(\frac{z}{x}\right)$$

$$x\frac{dz}{dx} = z \operatorname{Ln}\left(\frac{z}{x}\right) \Rightarrow z \operatorname{Ln}\left(\frac{z}{x}\right) dx - x\,dz = 0$$

همگن درجه ۱ :

$$z = tx \qquad dz = t\,dx + x\,dt$$

$$tx \operatorname{Ln}\left(\frac{tx}{x}\right) dx - x(t\,dx + x\,dt) = 0$$

$$dx(t \operatorname{Ln} t - t) - x\,dt = 0 \qquad (t \operatorname{Ln} t - t)\,dx = x\,dt$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t \operatorname{Ln} t - t} = \frac{dt}{t(\operatorname{Ln} t - 1)}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{\underbrace{t(\operatorname{Ln} t - 1)}_{u}} \qquad \operatorname{Ln}|x| + c = \operatorname{Ln}|\operatorname{Ln} t - 1|$$

$$\Rightarrow |\operatorname{Ln} t - 1| = e^{\operatorname{Ln}|x| + c} = k e^{\operatorname{Ln}|x|} = k|x| \qquad (k > 0)$$

$$|\operatorname{Ln} t - 1| = k|x| \Rightarrow \operatorname{Ln} t - 1 = 1 \pm kx$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln} t = 1 \pm kx \qquad \boxed{t = e^{1 \pm kx}} \qquad t = \frac{z}{x}$$

$$\frac{z}{x} = e^{1 \pm kx} \Rightarrow z = xe^{1 \pm kx} \Rightarrow y' = xe^{1 \pm kx}$$

$$\boxed{y = \int xe^{1 \pm kx}\, dx + c} \leftarrow$$

با انتگرال جزء جزء حل شود

ب) معادله فاقد متغیر x باشد. یعنی $F(y,y',y'')=0$:

با در نظر گرفتن $z=y'$ و مشتق گیری از دو طرف نسبت به y و محاسبهٔ y'' به معادلهٔ مرتبهٔ اول برحسب z و y می‌رسیم.

$$z=y' \Rightarrow \frac{dz}{dy}=\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} \longrightarrow \frac{1}{y'}$$

$$\Rightarrow z'=y''\cdot\frac{1}{y'}=y''\cdot\frac{1}{z} \Rightarrow \boxed{y''=z\cdot z'}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(y,z,z\cdot z')=0}$$

مثال) $y''+y'\cdot\cos y=0$

$$z\cdot z'+z\cos y=0 \qquad z(z'+\cos y)=0$$

① $z=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \boxed{y=c}$

② $z'+\cos y=0 \qquad \frac{dz}{dy}=-\cos y \qquad dz=-\cos y\,dy$

$$z=\int -\cos y\,dy+c=-\sin y+c \qquad \boxed{z=-\sin y+c}$$

$$z=y'=\frac{dy'}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=c-\sin y \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{c-\sin y}=dx}$$

$$\boxed{\int dx=\int\frac{dy}{c-\sin y}}$$

با استفاده از روش نصف کمان حل می‌شود

$$\begin{cases} \sin y=\frac{2t}{1+t^2} \\ dy=\frac{2dt}{1+t^2} \\ t=tg\frac{y}{2} \end{cases}$$

طرف اول $=x+K$

$$\text{طرف دوم}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{c-\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{ct^2-c-2t}$$

$$=\int\frac{2dt}{ct^2-2t+c}$$

$$=\int\frac{2\,dt}{c\left[(t-\frac{1}{c})^2+(1-\frac{1}{c^2})\right]} \longrightarrow ?$$

با مربع کامل می‌شود

$$ct^2-2t+c=c\left(t^2-\frac{2}{c}t+1\right)$$

$$=c\left(t^2-\frac{2}{c}t+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}+1\right)$$

$$=c\left[(t-\frac{1}{c})^2+1-\frac{1}{c^2}\right]$$

۳۹

ص ۱۰۵ / ۱۰

مثال : $yy''-y'^2=0 \qquad y'=z \qquad y''=z.z'$

$$y.zz'-z^2=0 \rightarrow z(yz'-z)=0$$

$$z=0 \Rightarrow y'=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \boxed{y=c}$$

$$yz'-z=0 \qquad \frac{y\,dz}{dy}-z=0 \rightarrow y\frac{dz}{dy}=z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z}=\frac{dy}{y} \rightarrow \mathrm{Ln}|y|+c=\mathrm{Ln}|z|$$

$$\Rightarrow |z|=e^{\mathrm{Ln}|y|+c} \rightarrow |z|=K|y|$$

$$\Rightarrow z=\pm Ky \rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm Ky$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=\pm K\,dx \rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int \pm K\,dx$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}|y|=\pm Kx+c \rightarrow |y|=e^{\pm Kx+c}$$

$$\boxed{y=\pm K_1.e^{\pm Kx}}$$

پ) معادله فاقد متغیر x و y باشد. یعنی: $F(y',y'')=0$

۱) متغیر مستقل x $\qquad y'=z \qquad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dx} \Rightarrow y''=z'$

۲) متغیر مستقل y $\qquad y'=z \qquad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z'z$

$$\Rightarrow y'=z \qquad y''=z.z'$$

در معادله قرار داده و به معادلهٔ مرتبهٔ اول می‌رسیم. آن را حل کرده و z را به دست می‌آوریم. سپس با انتگرال‌گیری از z ، y به دست می‌آید.

مثال : $y''+y'^2=0$

مستقل x $\rightarrow z'+z^2=0 \qquad \frac{dz}{dx}+z^2=0$

$$\frac{dz}{dx}=-z^2 \Rightarrow \frac{dz}{-z^2}=dx \qquad \int\frac{-dz}{z^2}=\int dx$$

$\frac{1}{z}=x+c \qquad \frac{1}{y'}=x+c \rightarrow y'=\frac{1}{x+c} \Rightarrow \boxed{y=\ln|x+c|+K}$

ت) معادله همگن :

تعریف : معادله $F(x,y,y',y'')=0$ نسبت به متغیرهای y'' و y' و y همگن است هرگاه :

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^{4}F(x,y,y',y'')$$

اگر معادله همگن باشد با تعریف $y=e^{\int z\,dx}$ می‌توان معادله را به معادله مرتبه اول برحسب z و x تبدیل کرد که پس از محاسبه z ، y را از رابطه $y=e^{\int z\,dx}$ حساب می‌کنیم. y' و y'' نیز به شکل زیر حساب می‌شوند :

$$y=e^{\int z\,dx} \qquad y'=\frac{dy}{dx}=ze^{\int z\,dx}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=z'e^{\int z\,dx}+z.z.e^{\int z\,dx}$$

$$\Rightarrow y''=(z'+z^2)e^{\int z\,dx}$$

$$\Rightarrow F(x,e^{\int z\,dx},ze^{\int z\,dx},(z'+z^2)e^{\int z\,dx})=0$$

$e^{\int \underbrace{(x^2+x)}_{z}dx}$

$y'=(x^2+x)e^{\int\cdots}$

مثال ۸۴ ص ۱۰۵) $yy''=2(y')^2 \longrightarrow y'=ze^{\int z\,dx}, \; y''=(z^2+z')e^{\int z\,dx}$

$yy''-2(y')^2=0 \rightarrow F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^2F(x,y,y',y'')$ همگن است ✓

$$e^{\int z\,dx}\cdot(z'+z^2)e^{\int z\,dx}-2.z^2e^{2\int z\,dx}=0$$

$$e^{2\int z\,dx}(z'+z^2-2z^2)=0 \qquad z'-z^2=0 \qquad \frac{dz}{dx}=z^2$$

$*$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z^2}=dx \Rightarrow \frac{-1}{z}=x+c \Rightarrow -z=\frac{1}{x+c}$$

$$z=\frac{-1}{x+c} \Rightarrow y=e^{\int\frac{-1}{x+c}dx}=e^{-\ln|x+c|}+K$$

$$y=e^{-\ln|x+c|}+K=\frac{1}{|x+c|}+K$$

$$\boxed{y=\frac{1}{|x+c|}+K}$$

مثال و تمرین:

۱) $xy''+y'=0$	۴) $y''+e^{y}(y')^{3}=0$
۲) $y''=y'+tghx$	۵) $y''+y'tgx=\sin 2x$
۳) $yy''-(y')^{2}=0$	۶) xy''

$$tghx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

تذکر: در حالت کلی معادله $F(x,y^{k},y^{k+1},\dots,y^{k+n})=0$ با استفاده از تغییر متغیر $z=y^{(k)}$ به معادله مرتبه n ام $F(x,z,z',\dots,z^{n})$ تبدیل می‌شود.

مثال) $xy'''+y''=1+x$

$z=y'' \rightarrow z'=y'''$ $\quad xz'+z=1+x$

$z'+\frac{1}{x}z=1+\frac{1}{x}$ خطی مرتبه اول

$z=? \Rightarrow y''=? \xrightarrow{\text{دو بار انتگرال}}$

$z=\frac{1}{x}\left(\int x.\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+c\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x^{2}}{2}+x+c\right)\longrightarrow$ ادامه ۲ بار انتگرال‌گیری

- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم:

صورت کلی معادلات مرتبه دوم به شکل زیر است:

I) $y''+P(x)y'+Q(x)y=r(x)$ غیرهمگن

در حالتی که $r(x)=0$، یعنی II $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$، معادله را همگن نامیم.

قضیه ۱: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای خصوصی معادله II (همگن) باشند، $y_h=c_1y_1+c_2y_2$ $(c_i\in\mathbb{R})$ جواب عمومی معادله II می‌باشد.

قضیه ۲: اگر y_p جواب خصوصی معادله I (غیرهمگن) و y_h جواب عمومی معادله II باشد، $y=y_h+y_p$ جواب عمومی معادله I (غیرهمگن) می‌باشد.

جواب عمومی غیرهمگن، جواب عمومی همگن، جواب خصوصی غیرهمگن

در این مبحث برای حل معادله غیرهمگن ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم (روشهای مشخص دارد)، سپس

با توجه به طرف دوم معادلهٔ غیرهمگن ، جواب خصوصی معادله را به دست می‌آوریم جمع دو جواب ، جواب عمومی غیرهمگن می‌باشد

تعریف : توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ مستقل خطی هستند هرگاه از تساوی $c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n=0$ نتیجه $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ حاصل شود . در غیر این صورت وابسته‌اند .

مثال : در هر مورد استقلال یا وابستگی را بررسی کنید .

1) $x, x^2 \rightarrow c_1x+c_2x^2=0 \overset{?}{\Longrightarrow} c_1=c_2=0$

$$\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array} \quad -2\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 2c_1+4c_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} -2c_2+4c_2=0 \Rightarrow 2c_2=0 \quad \boxed{c_2=0} \\ c_1+c_2=0 \rightarrow c_1+0=0 \quad \boxed{c_1=0} \end{array}$$

$\longrightarrow$ x و x^2 مستقل می‌باشند

2) $e^x, e^{2x} \rightarrow c_1e^x+c_2e^{2x}=0$

$$\underset{\neq 0}{e^x}(c_1+c_2e^x)=0 \qquad c_1+c_2e^x=0$$

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \Rightarrow -\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1+ec_2=0 \end{cases} \quad c_2-ec_2=0 \quad \begin{array}{l} c_2(1-e)=0 \quad \boxed{c_2=0} \\ c_1=0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ مستقل هستند

3) $e^x, 5e^x \rightarrow c_1e^x+c_2(5e^x)=0 \rightarrow \underset{\neq 0}{e^x}(c_1+5c_2)=0$

$$\Rightarrow c_1+5c_2=0 \Rightarrow \boxed{c_1=-5c_2}$$

$\Leftarrow$ پس مستقل نیستند .

تعریف : فرض کنیم توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ تا مرتبهٔ $n-1$ مشتق‌پذیر باشند ، در این صورت رونسکی (رونسکین) این توابع به این صورت تعریف می‌شود :

$$w(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال:

$$w(x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0$$

$\Leftarrow$ مستقل اند

تذکر: توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ مستقل خطی می باشند هرگاه $w(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ باشد. مثال:

$$w(e^x, 3e^x) = \begin{vmatrix} e^x & 3e^x \\ e^x & 3e^x \end{vmatrix} = 3e^{2x} - 3e^{2x} = 0$$

$\Leftarrow$ پس وابسته اند

تذکر: اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$، n جواب مستقل معادلهٔ مرتبهٔ n ام باشند، جواب عمومی به شکل زیر می باشد:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$$

در حالتی که معادلهٔ مرتبهٔ دوم باشد: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم همگن:

صورت کلی $\rightarrow$ $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$

$y_1 = y_1(x)$
جواب خصوصی

ترجیحاً اثبات فرمول در کتاب دیده شود. $\longrightarrow$ $\boxed{y_2 = y_1 \left(\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx} dx \right)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

ـ در حالات زیر جواب خصوصی مشخص می شوند:

۱) $1 + P(x) + Q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^x$

۲) $1 - P(x) + Q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$

۳) $P(x) + xQ(x) = 0 \Rightarrow y_1 = x$

۴) $m^2 + mP(x) + Q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^{mx}$

مثال: هریک از معادلات زیر را حل کنید:

Q(x) برروی y_1 اثر دارد اما در جواب y_2 دیده نمی‌شود.

۱) $xy'' + 2y' + xy = 0 \quad , \quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$

(یکی از جواب‌های خصوصی داده شده است، برای یافتن جواب عمومی، کافیست یک جواب دیگر خصوصی را به دست آورد که با اولی مستقل خطی باشد)

ابتدا به فرم استاندارد می‌نویسیم $\longrightarrow$ $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$

$$y_2 = y_1\left(\int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int P(x)\,dx}\,dx\right)$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\left(\int \frac{x^2}{\sin^2 x}\, e^{-\int \frac{2}{x}dx}\,dx\right) = \frac{\sin x}{x}\left(\int \frac{\cancel{x^2}}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}\,dx\right)$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \frac{\sin x}{x}\int (1 + \cot^2 x)\,dx$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x} \times -\cot x = -\frac{\cos x}{x} \qquad \boxed{y_2 = \frac{-\cos x}{x}}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1\frac{\sin x}{x} + c_2\left(\frac{-\cos x}{x}\right)$$

مثال: $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0 \qquad y_1 = e^x$

حل: $y'' - \left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right) + \dfrac{x+2}{(x+1)}y = 0$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{2x+3}{x+1}\,dx = \int \frac{2x+2+1}{x+1}\,dx \\ &\int 2 + \frac{1}{x+1}\,dx = 2x + \mathrm{Ln}(x+1)\end{aligned}}$$

$$y_2 = e^x\left(\int \frac{1}{e^{2x}} \cdot e^{\int \frac{2x+3}{x+1}dx}\,dx\right)$$

$$y_2 = e^x\left(\int e^{-2x} \cdot e^{2x + \mathrm{Ln}(x+1)}\,dx\right)$$

$$= e^x\left(\int e^{\mathrm{Ln}(x+1)}\,dx\right) = e^x\left(\int x+1\,dx\right) = e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y_2 = e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

تمرین:

1) $(1+x)^2y''-2(x+1)y'+2y=0 \qquad y_1=1+x$

2) $y''-y'+e^{2x}y=0 \qquad y_1=\sin(e^x)$

3) $(1-x)^2y''+4(1-x)y'+2y=0 \qquad y_1=\dfrac{1}{1-x}$

* معادلات خطی مرتبهٔ n ام همگن با ضرایب ثابت:

صورت کلی: $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$

شکل اپراتوری: $a_nD^ny+a_{n-1}D^{n-1}y+\cdots+a_1Dy+a_0y=0$

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0)y=0 \qquad \left(Dy=\frac{dy}{dx},\quad D^ny=\frac{d^ny}{dx^n}\right)$$

معادلهٔ مشخصه $\rightarrow a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0=0$

معادلهٔ مشخصه را حل می‌کنیم. این معادله دارای n جواب حقیقی یا مختلط می‌باشد (بدون تکرار یا با تکرار)

جواب متناظر هر ریشهٔ معادلهٔ مشخصه را به دست می‌آوریم. به جوابهای $y_1, y_2, \ldots, y_n$

می‌رسیم. بنابراین جواب عمومی به شکل زیر است:

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$$

برای نوشتن جوابهای متناظر ریشه‌های معادلهٔ مشخصه به مثال زیر توجه کنید:

مثال: در هر مورد ریشه‌های معادلهٔ مشخصه داده شده، جوابهای متناظر را بنویسید و پس از تشکیل معادلهٔ مشخصه، معادلهٔ اصلی را بنویسید.

اگر ریشه‌های تکراری باشد، در x ضرب می‌کنیم (آنقدر در x ضرب می‌کنیم تا تکراری نباشد) $\times x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$

1) $5,\ 2$

$y_1=e^{5x} \qquad y_2=e^{2x}$

$y=c_1e^{5x}+c_2e^{2x}$

$(D-5)(D-2)=0$

$D^2-7D+10=0$

$(D^2-7D+10)y=0$

$y''-7y'+10y=0$

2) $3,\ 3,\ 3,\ 2 \longrightarrow e^{2x}$

$e^{3x} \quad xe^{3x} \quad x^2e^{3x}$

$y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}+c_3x^2e^{3x}+c_4e^{2x}$

$(D-3)(D-3)(D-3)(D-2)=0$

$(D^3-9D^2+27D-27)(D-2)=0$

$D^4-9D^3+27D^2-27D-2D^3+18D^2-54D+54=0$

$D^4-11D^3+45D^2-81D+54=0$

$y^{(4)}-11y'''+45y''-81y'+54y=0$

* هرگاه ریشه تکراری باشد، با ضرب توانهای طبیعی x (x, x^2, x^3 ---) در جوابهای متناظر، جوابها را از یکدیگر مستقل می کنیم.

یادآوری:

$$x^2+4x+9=0 \qquad \Delta=16-4(9)=-20$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{-20}}{2}=-2\pm\sqrt{5}=-2\pm\sqrt{5}\,i$$

جوابها مزدوج و مختلط

$\alpha\pm\beta i$

$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$

3) $2,\ 3\pm5i$

e^{2x} $\quad e^{3x}\cos5x,\ e^{3x}\sin5x$

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}\cos5x+c_3e^{3x}\sin5x$$

$$y=c_1e^{2x}+e^{3x}(c_2\cos5x+c_3\sin5x)$$

(اثبات)

$z_1=\alpha+\beta i \qquad y_1=e^{z_1x}=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}$

برای امتحان اثبات لازم نیست.

$$=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x) \qquad (e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta)$$

$z_2=\alpha-\beta i \qquad y_2=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$

$$c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+c_2e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

$\xrightarrow{3}$ $=(c_1+c_2)e^{\alpha x}\cos\beta x+(c_1i-c_2i)\sin\beta x\,.\,e^{\alpha x}$

$$(D-2)(D-(3+5i))(D-(3-5i))=0 \longrightarrow ?$$

4) $2,\ 5\pm2i,\ 5\pm2i,\ 3$

$$e^{2x},\ e^{5x}\cos2x,\ e^{5x}\sin2x,\ xe^{5x}\sin2x,\ xe^{5x}\cos2x,\ e^{3x}$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_6y_6$$

$$(D-2)(D-3)(D-(5+2i))^2(D-(5-2i))^2=0$$

معادلات مرتبهٔ دوم همگن با ضرایب ثابت:

$$y'' + py' + qy = 0$$
$$m^2 + pm + q = 0$$

1) $\Delta > 0 \longrightarrow$ دو ریشه m_2, m_1 $\qquad y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

2) $\Delta = 0 \longrightarrow$ ریشه مضاعف $\qquad y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$

3) $\Delta < 0 \longrightarrow \alpha \pm \beta i \qquad y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

۳۷) م ۳۷ ص ۱۰۷ $\quad y''' - y'' - y' + y = 0$

$$D^3 - D^2 - D + 1 = 0$$
$$D^2(D-1) - (D-1) = 0$$
$$(D-1)(D^2-1) = 0$$
$$(D-1)(D-1)(D+1) = 0$$

$1, 1, -1$

$e^x, \quad xe^x, \quad e^{-x}$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}$$

۳۸) $y^{(4)} + y = 0 \qquad D^4 + 1 = 0 \qquad D^2 = t \Rightarrow t^2 + 1 = 0$

$t^2 = -1 \qquad t = \pm\sqrt{-1}$

$t = \pm i$

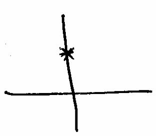
$D^2 = i \rightarrow$ ریشه‌های i $= D$

$D^2 = -i \rightarrow -i$ ″ ″ $= D$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$z = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k}{n}\right)\right)$$

$$z_k = \sqrt[2]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)$$



$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z=-i \qquad z_K=\sqrt[2]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2K\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2K\pi}{2}\right)$$

$$z_0=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \ , \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \rightarrow$$

$$\underbrace{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x}_{y_1},\ \underbrace{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x}_{y_2} \qquad \underbrace{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x}_{y_3},\ \underbrace{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x}_{y_4}$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+c_4y_4$$

* معادلاتی که به معادلات همگن با ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند:

الف) معادلهٔ کشی اویلر مرتبهٔ n:

صورت کلی: $a_nx^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=0$

شکل اپراتوری $(a_nx^nD^n+a_{n-1}x^{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1xD+a_0)y=0$

با تعریف $z=\ln x$ (یا $x=e^z$) و محاسبهٔ $y^{(n)}$ نسبت به z، معادله به معادلهٔ مرتبهٔ nام همگن با ضرایب ثابت برحسب y و z تبدیل می‌شود که آن را حل می‌کنیم سپس به جای z، مقدار آن را برحسب x قرار می‌دهیم.

$$y^{(K)}=\frac{D^Ky}{x^K}=\frac{D_z(D_z-1)(D_z-2)\cdots(D_z-(K-1))y}{x^K}$$

$y'=D_zy \qquad y''=D_z(D_z-1)y \qquad$ مشتق y نسبت به z $=D_zy$

$K\geq 1$ و $\leftarrow$

در مورد معادلهٔ مرتبهٔ دوم:

$$a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=0$$

$$\Rightarrow x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0 \qquad \alpha=\frac{a_1}{a_2}\ ,\ \beta=\frac{a_0}{a_2}$$

$$\boxed{y''+(\alpha-1)y'+\beta y=0} \leftarrow z=\ln x$$

مثال: $x^2y''+6xy'+6y=0$

$y''+5y'+6y=0$ $\qquad D^2+5D+6=0 \qquad (D+2)(D+3)=0$

$D_1=-2 \qquad D_2=-3$

$y=c_1e^{-2z}+c_2e^{-3z}=c_1e^{-2\ln x}+c_2e^{-3\ln x}$

$y=c_1x^{-2}+c_2x^{-3}=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x^3}$

$\Rightarrow y=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x^3}$

وقتی ضریب x^2، ۱ است، x و x^2 را حذف و ضریب x، ۱ واحد کم می‌کنیم

مثال: $\underset{\beta}{1}x^2y''+\underset{\alpha}{2}xy'+y=0$ $\qquad y''+y'+y=0 \qquad D^2+D+1=0$

$\Delta=1-4=-3 \qquad D=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\underset{\alpha}{-\dfrac{1}{2}}\pm\underset{\beta}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}i$

$y=e^{\alpha z}(c_1\cos\beta z+c_2\sin\beta z)$

$y=e^{-\frac{1}{2}z}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \qquad z=\ln x$

$y=e^{-\frac{1}{2}\ln x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$

اثبات

$y''=\dfrac{D_z(D_z-1)y}{x^2} \qquad y'=\dfrac{D_zy}{x}$

$x^2\cdot\dfrac{D_z(D_z-1)y}{x^2}+2x\dfrac{1}{x}D_zy+y=0 \qquad (D_z^2-D_z+(D_z+1))y=0$

$(D_z^2+D_z+1)y=0$

مثال: $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0 \qquad z=\ln x$

$y'''=\dfrac{1}{x^3}D_z(D_z-1)(D_z-2)y \qquad y''=\dfrac{1}{x^2}D_z(D_z-1)y \qquad y'=\dfrac{1}{x}D_zy$

$D(D_z-1)(D_z-2)y+3D_z(D_z-1)y-2D_zy+2y=0$

بسط می‌دهیم

$(D_z(D_z-1)(D_z-2)+3D_z(D_z-1)-2D_z+2)y=0$

$D_z(D_z^2-3D_z+2)+3D_z^2-3D_z-2D_z+2=0$

$D_z^3-3D_z^2+2D_z+3D_z^2-3D_z-2D_z+2=0$

$D_z^3-3D_z+2=0 \qquad D_z^3-D_z-2D_z+2=0$

ادامه ۵۸

مثال قبل:

$$D_z(D_z^2-1)-2(D_z-1)=0 \qquad (D_z-1)\big(D_z(D_z+1)-2\big)=0$$

$$(D_z-1)(D_z^2+D_z-2)=0 \qquad (D_z-1)(D_z-1)(D_z+2)=0$$

۱ و ۱ و ۲-

$$\Rightarrow y=c_1e^{z}+c_2ze^{z}+c_3e^{-2z} \qquad e^{z},\ ze^{z},\ e^{-2z}$$

$$\longrightarrow y=c_1e^{\ln x}+c_2\ln x\, e^{\ln x}+c_3e^{-2\ln x}=\boxed{c_1x+c_2x\ln x+c_3\times\frac{1}{x^2}}$$

مثال: $x^3y'''+2x^2y''=0$ $\qquad z=y''$ $\qquad$ ← روش اول

$$x^3z'+2x^2z=0 \qquad x^2(xz'+2z)=0 \qquad x\frac{dz}{dx}+2z=0$$

$\frac{dz}{z}=\frac{-2dx}{x}$ ⟵ z را حساب کرده و ۲ بار انتگرال می‌گیریم.

روش دوم ←

$$y'''=\frac{1}{x^3}D_z(D_z-1)(D_z-2)y \qquad y''=\frac{1}{x^2}D_z(D_z-1)y$$

$$D_z(D_z-1)(D_z-2)y+2D_z(D_z-1)y=0$$

در معادله مشخصه y نمی‌نویسیم $\longrightarrow$ $D_z(D_z-1)(D_z-2)+2D_z(D_z-1)=0$

$$D_z(D_z-1)(D_z-2+2)=0 \qquad D_z^2(D_z-1)=0$$

$$y=c_1+c_2z+c_3e^{\ln x}$$

۰ و ۰ و ۱ → $1,\ z.1,\ e^{z}$

$$\boxed{y=c_1+c_2\ln x+c_3e^{\ln x}}$$

ب) معادله لژاندر مرتبه n ام:

فرم →
$$a_n(ax+b)^ny^{(n)}+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1(ax+b)y'+a_0y=0$$

فرم اپراتوری →
$$\big(a_n(ax+b)^nD^n+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}D^{n-1}+\dots+a_1(ax+b)D+a_0\big)y=0$$

$$z=\ln(ax+b)$$

$$y^{(k)}=\frac{a^k}{(ax+b)^k}D_z(D_z-1)\dots(D_z-(k-1))$$

با انجام تغییرات فوق، معادله به یک معادله مرتبه n ام برحسب y و z با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود که آنرا حل می‌کنیم، سپس به جای z از $\ln(ax+b)$ استفاده می‌کنیم.

(الف)

مثال: $(x+5)^3 y''' + 2(x+5)^2 y'' = 0$ $\qquad y'' = z$

روش اول:

$$(x+5)^3 z' + 2(x+5)^2 z = 0$$

$$(x+5) z' + 2z = 0 \longrightarrow$$ z را حساب کرده و ۲ بار انتگرال می‌گیریم.

روش دوم:

$$y''' = \frac{1}{(x+5)^3} D_z (D_z - 1)(D_z - 2) y$$

$$y'' = \frac{1}{(x+5)^2} D_z (D_z - 1) y$$

$$D_z (D_z - 1)(D_z - 2) y + 2 D_z (D_z - 1) y = 0 \qquad z = \ln(x+5)$$

معادله مشخصه ← $D_z (D_z - 1)(D_z - 2) + 2 D_z (D_z - 1) = 0$

$$D_z (D_z - 1)(D_z - 2 + 2) = 0 \Rightarrow D_z^2 (D_z - 1)$$

$$0,\ 0,\ 1$$

$$1 \quad z \quad e^z$$

$$y = c_1 + c_2 \ln(x+5) + c_3 e^{\ln(x+5)}$$

$$y = c_1 + c_2 \ln(x+5) + c_3 (x+5)$$

* حل معادلات غیرهمگن:

همان‌طور که می‌دانیم، برای حل معادلهٔ غیرهمگن ابتدا معادلهٔ همگن را حل می‌کنیم، سپس جواب عمومی این معادله را با جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow \quad y = y_h + y_p$$

جواب عمومی همگن — جواب خصوصی غیرهمگن

حل معادلات همگن بررسی شد، برای به دست آوردن y_p سه روش وجود دارد.

الف) ضرایب نامعین

ب) روش اپراتور معکوس

ج) روش تغییر پارامتر لاگرانژ

(الف) روش ضرایب نامعین :

این روش را برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم غیرهمگن با ضرایب ثابت عنوان می‌کنیم .

$$y''+py'+qy=g(x) \xrightarrow{\text{فرم دیگر}} ay''+by'+cy=g(x)$$

شکل جواب خصوصی به شکل تابع g بستگی دارد. یعنی با توجه به شکل g نوع جواب خصوصی را حدس زده ، سپس جواب را در معادلهٔ اصلی قرار داده و ضرایب مجهول جواب خصوصی را به دست می‌آوریم :

حالت اول → $g(x)=Ae^{\alpha x}$

- α ریشهٔ معادلهٔ مشخصه نباشد : $y_p=a_0e^{\alpha x}$ ، $a_0=?$
- α ریشهٔ ساده باشد : $y_p=a_0xe^{\alpha x}$ ، $a_0=?$
- α ریشهٔ مضاعف معادلهٔ مشخصه باشد : $y_p=a_0x^2e^{\alpha x}$ ، $a_0=?$

مثال : $y''+5y'+6y=-2e^{-x}=Ae^{\alpha x}$

$$y''+5y'+6y=0 \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} D^2+5D+6=0 \qquad (D+2)(D+3)=0$$

$-2 \to e^{-2x}$ ، $-3 \to e^{-3x}$

$$y_h=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

$\alpha=-1 \longrightarrow$ ریشه نمی‌باشد

در معادلهٔ اصلی قرار می‌دهیم

$$y_p=a_0e^{-x}$$

$$y'=-a_0e^{-x} \qquad y''=a_0e^{-x}$$

$$a_0e^{-x}+5(-a_0e^{-x})+6a_0e^{-x}=-2e^{-x}$$

$$2a_0e^{-x}=-2e^{-x} \Rightarrow 2a_0=-2 \qquad \boxed{a_0=-1}$$

$$y=y_h+y_p \qquad \boxed{y_p=-e^{-x}}$$

$$\boxed{y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}-e^{-x}}$$

مثال : $y''+2y'+y=10e^{-x} \to \alpha=-1$

$$y''+2y'+y=0 \qquad D^2+2D+1=0 \qquad (D+1)^2=0 \qquad D_1=-1,-1$$

$-1 \to e^{-x}$ ، $-1 \to xe^{-x}$

$$y_h=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

$$y_p=a_0x^2e^{-x}$$

ریشهٔ مضاعف $\alpha=-1$

$$y'=2a_0xe^{-x}-a_0x^2e^{-x}$$

$$y''=2a_0e^{-x}-\underline{2a_0xe^{-x}}-\underline{2a_0xe^{-x}}+a_0x^2e^{-x}$$

(۵۳)

$$2a_0e^{-x} - 4a_0xe^{-x} + a_0x^2e^{-x} + 4a_0xe^{-x} - 2a_0x^2e^{-x} + a_0x^2e^{-x} = 10e^{-x}$$

$$2a_0e^{-x} = 10e^{-x} \quad \Rightarrow \quad 2a_0 = 10 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 5$$

$$\boxed{y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + 5x^2e^{-x}} \qquad \boxed{y_p = 5x^2e^{-x}}$$

* اگر ریشه ساده بود در x ضرب می‌شد اما در اینجا در x^2 ضرب می‌شود. $2a_0$

---

(۲)

$$g(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$$

$$\begin{cases} \sin\alpha x = \dfrac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} \\[2ex] \cos\alpha x = \dfrac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} \end{cases}$$

الف) $i\alpha$ ریشه معادله مشخصه نباشد $\longrightarrow y_p = a_0\sin\alpha x + b_0\cos\alpha x$

ب) $i\alpha$ ریشه معادله مشخصه باشد $\longrightarrow y_p = x(a_0\sin\alpha x + b_0\cos\alpha x)$

مثال

1) $y'' + y' = 2\cos x - \sin x$

$y'' + y' = 0 \rightarrow D^2 + D = 0 \quad D = 0, -1 \qquad y_h = c_1e^{0} + c_2e^{-x}$

$\alpha = 1 \Rightarrow \quad i^2 + i \neq 0 \qquad -1 + i \neq 0$ ریشه معادله نمی‌باشد

$y_p = a_0\sin x + b_0\cos x \qquad y' = a_0\cos x - b_0\sin x$

$y'' = -a_0\sin x - b_0\cos x$

$2\cos x - \sin x = y'' + y' - (a_0 - b_0)\cos x - (a_0 + b_0)\sin x$

$(a_0 - b_0)\cos x - (a_0 + b_0)\sin x = 2\cos x - \sin x$

$$\begin{cases} a_0 - b_0 = 2 \\ -a_0 - b_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad -2b_0 = 1 \quad \Rightarrow \boxed{b_0 = -\frac{1}{2}}$$

$$a_0 + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{5}{2}}$$

$$\boxed{y_p = \frac{5}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x} \qquad y = y_h + y_p$$

(۵)

مثال: $y''+4y=-2\sin 2x$ → α در مورد (۲)

$\alpha i = 2i$
ریشه بودن αi

$y''+4y=0 \quad D^2+4=0 \Rightarrow D^2=-4 \Rightarrow D=\pm 2i$

این α با α که در (۳) گفته شد تفاوت دارد، این α ریشه های Ds است.

$y_h = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

$\Rightarrow y_h = e^{0x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) = \boxed{c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x}$

$y_p = x(a_0\cos 2x + b_0 \sin 2x) = a_0 x\cos 2x + b_0 x\sin 2x$

$(2i)^2+4 = 4i^2+4=0 \checkmark$

$y' = a_0\cos 2x - 2a_0 x\sin 2x + b_0\sin 2x + 2b_0 x\cos 2x$

$y'' = -2a_0\sin 2x - 2a_0\sin 2x - 4a_0 x\cos 2x + 2b_0\cos 2x + 2b_0\cos 2x -$

$-4b_0 x\sin 2x = -4a_0\sin 2x - 4a_0 x\cos 2x + 4b_0\cos 2x - 4b_0 x\sin 2x$

$4y = 4a_0 x\cos 2x + 4b_0 x\sin 2x$

$y'' = -4a_0\sin 2x - 4a_0 x\cos 2x - 4b_0 x\sin 2x + 4b_0\cos 2x$

$y''+4y = -4a_0\sin 2x + 4b_0\cos 2x = -2\sin 2x$

$\begin{cases} -4a_0=-2 \\ a_0=\frac{1}{2} \\ 4b_0=0 \\ b_0=0 \end{cases}$

$\boxed{y_p = \frac{1}{2}x\cos 2x} \qquad y = y_h + y_p$

(۴)

$g(x) =$ چندجمله‌ای دارای درجه n

الف) $c \neq 0 \longrightarrow y_p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

ب) $c=0, b\neq 0 \longrightarrow y_p = x\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

ج) $b=c=0 \longrightarrow y_p = x^2\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

مثال: $y''-5y'+6y = x^2+1$

حل همگن $y''-5y'+6y=0 \qquad D^2-5D+6=0 \qquad D=2,3$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

۵۵

$$y_p = Ax^2 + Bx + c$$

$$y' = 2Ax + B \qquad y'' = 2A$$

$$y'' = 2A \qquad -5y' = -10Ax - 5B$$

$$6y = 6Ax^2 + 6Bx + 6c$$

جمع $\quad 6Ax^2 + (6B - 10A)\,x + (2A - 5B + 6c) = x^2 + 1$

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$6B - 10A = 0 \Rightarrow 6B - \frac{10}{6} = 0 \qquad B = \frac{10}{36} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

$$2A - 5B + 6c = 1 \Rightarrow \frac{2}{6} - \frac{25}{18} + 6c = 1 \qquad 6c = 1 - \frac{1}{3} + \frac{25}{18}$$

$$6c = \frac{18 - 6 + 25}{18}$$

$$\boxed{c = \frac{37}{108}}$$

$$y_p = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

مثال: $\quad y'' + y' = x^2 + x$

$$y'' + y' = 0 \qquad D^2 + D = 0 \rightarrow D = 0\,,\,-1 \qquad \boxed{y_h = c_1 e^{0} + c_2 e^{-x}}$$

$$c = 0 \rightarrow y_p = x\left(Ax^2 + Bx + c\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + c$$

$$y'' = 6Ax + 2B$$

$$3Ax^2 + (2B + 6A)\,x + (2B + c) = x^2 + x \Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ 6A + 2B = 1 \\ 2B + c = 0 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{3}$$

$$2 + 2B = 1 \qquad \boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

$$-1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$y_p = x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x} \quad , \quad \boxed{y = y_h + y_p}$$

روش فوق را برای معادلهٔ مرتبهٔ n ام غیرهمگن با ضرایب ثابت به شکل زیر بیان می‌کنیم : (صفحه ۸۴، ۸۵ کتاب)

معادله $\quad y^{(n)} + P_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = r(x)$

۵۷

حالت

① $r(x) = ce^{\alpha x} \longrightarrow y_p = Ae^{\alpha x}$

② $r(x) = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x \longrightarrow y_p = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

③ $r(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\text{چندجمله‌ای}} \longrightarrow y_p = \underbrace{A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0}_{\text{چندجمله‌ای}}$

④ $r(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x} \longrightarrow y_p = (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)e^{\alpha x}$

⑤ $r(x) = P_n(x)\left(a\cos\alpha x + b\sin\alpha x\right) \longrightarrow y_p = (A_n x^n + \cdots + A_0)\cos\alpha x + (B_n x^n + \cdots + B_0)\sin\alpha x$

⑥ $r(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x) \rightarrow y_p = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

⑦ $r(x) = e^{\alpha x}\cdot P_n(x)\cdot(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$

$$\rightarrow y_p = e^{\alpha x}\cdot\left[(A_n x^n + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_n x^n + \cdots + B_0)\sin\beta x\right]$$

(درقسمت ۵ به جای αx در توابع مثلثاتی از $(ax+b)$ استفاده کرده است).

* در معادلهٔ غیرهمگن ابتدا معادله را به همگن تبدیل می‌کنیم. معادله را حل می‌کنیم. y_p در نظر گرفته شده و y_h را مقایسه می‌کنیم. اگر y_p و y_h جملهٔ وابسته (مشترک) داشته باشند y_p را در کمترین توان طبیعی از x یعنی x^m ضرب می‌کنیم تا جملات مشترک به جملات مستقل (غیرمشترک) تبدیل شوند.

مثال) ۵۶ ص ۱۰۸

$y'' - y' + y = x^3 - 3x^2 + 1$ | $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$y'' - y' + y = 0 \qquad D^2 - D + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 \qquad D = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$y_h = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

۵۷ ۲/۵۷ ص ۱۰۸

$$y''+3y'+2y=\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$y''+3y'+2y=0 \qquad D^2+3D+2=0 \qquad (D+1)(D+2)=0 \qquad D=-1,-2$$

$$y_h=c_1\underline{\underline{e^{-x}}}+c_2e^{-2x} \qquad y_p=Ae^{x}+B\underline{\underline{e^{-x}}}$$

جمله مشترک داریم.

$$\Rightarrow \boxed{y_p=Axe^{x}+Bxe^{-x}}$$

* حل کامل در جلسه حل تمرین.

مثال ۵ :

$$y'''-y''+y'=x^2e^{x}-4x^2$$

$$D^3-D^2+D=0 \qquad D(D^2-D+1)=0 \qquad D=0\ ,\ D=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_h=\underline{\underline{c_1e^{0x}}}+e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$y_p=(Ax^2+Bx+c)e^{x}+(A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+\underline{\underline{A_0}})$$

- به خاطر این قسمت دوم را در x ضرب می‌کنیم.

$$y_p=(Ax^2+Bx+c)e^{x}+(A_4x^5+A_3x^4+A_2x^3+A_1x^2+A_0x)$$

۲۶۲) $$y''+3y'=3xe^{-3x} \qquad y_p=(Ax+B)e^{-3x}$$

$$D^2+3D=0 \qquad D=0 \qquad D=-3 \qquad =Axe^{-3x}+B\underline{\underline{e^{-3x}}}$$

$$y_h=c_1e^{0x}+c_2\underline{\underline{e^{-3x}}} \qquad \Rightarrow y_p=(Ax^2+Bx)e^{-3x}$$

$$y_p=Ax^2e^{-3x}+Bxe^{-3x}$$

$$y'=2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x}+Be^{-3x}-3Bxe^{-3x}$$

$$y''=2Ae^{-3x}-6Axe^{-3x}-6Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}-3Be^{-3x}-3Be^{-3x}+9Bxe^{-3x}$$

$$y''=(2A-6Ax-6Ax+9Ax^2-3B-3B+9Bx)e^{-3x}$$

$$y''=(2A-12Ax+\cancel{9Ax^2}-6B+\cancel{9Bx})e^{-3x}$$

$$3y'=(6Ax-\cancel{9Ax^2}+3B-\cancel{9Bx})e^{-3x}$$

$$y''+3y'=(-6Ax-3B+2A)e^{-3x}=3xe^{-3x}$$

۵۸

$$\begin{cases} -6A = 3 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \\ 2A - 3B = 0 \qquad 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3B = 0 \Rightarrow -1 - 3B = 0 \end{cases}$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{y_p = -\frac{1}{2} x^2 e^{-3x} - \frac{1}{3} x e^{-3x}}$$

* روش اپراتور معکوس:

معادله روبرو را در نظر بگیرید: $\underbrace{(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)}_{F(D)}\, y = r(x)$

$F(D)$ یک عملگر می باشد و معکوس آن را $\frac{1}{F(D)}$ می نامیم. اگر y_p یک جواب خصوصی باشد، در معادله صدق می کند.

$$F(D)\cdot y_p = r(x) \xrightarrow[\text{اثر می دهیم}]{\frac{1}{F(D)}\ \text{تحت}} \boxed{y_p = \frac{1}{F(D)} r(x)}$$

باید $\frac{1}{F(D)}$ را بدست آوریم.

$F(D) = 0$ $\qquad$ λ_1، λ_2، ... و λ_n ریشه‌های $F(D)=0$ هستند.

$$F(D) = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (D-\lambda_i)$$

مهم

$$\boxed{y_p = e^{\lambda_1 x}\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int e^{(\lambda_3-\lambda_2)x}\cdots\int e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x}\int e^{-\lambda_n x}\, r(x)\, dx^n}$$

مثال ۲۵ ص ۱۰۸

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad D^2 + 4D + 4 = 0 \qquad \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -2}$$

$$y_p = e^{\lambda_1 x}\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int e^{-\lambda_2 x}\, r(x)\, dx^2$$

$$y_p = e^{-2x}\int e^{(-2+2)x}\int \underbrace{e^{2x}\cdot\frac{e^{-2x}}{x^2}}\, dx\, dx$$

$\prod \leftarrow$ ضرب

$\sum \leftarrow$ جمع

$$\int \frac{e^{2x}\cdot e^{-2x}}{x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$y_p = e^{-2x}\int e^{0}\cdot -\frac{1}{x}\,dx = e^{-2x}\cdot -\ln|x| = -e^{-2x}\ln|x|$$

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = \underline{c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x}\ln|x|}$$

* تذکر: هرگاه ریشه های معادله $F(D)=0$ مختلط باشند، بهتر است از این روش استفاده نکنیم.

مثال ۷۱ : $y'' - y = e^{x}\sin 2x$ $\qquad \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 1$

$$D^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = -1$$

$$y_p = e^{x}\int e^{(-1-1)x}\int e^{-(-1)x}\cdot e^{x}\sin 2x\,dx\,dx$$

$$y_p = e^{x}\int e^{-2x}\int e^{2x}\sin 2x\,dx\,dx$$

این بار برای راحتی $\lambda_2=1$ و $\lambda_1=-1$ می گیریم.

$$y_p = e^{-x}\int e^{(1-(-1))x}\int \underbrace{e^{-x}\cdot e^{x}\sin 2x\,dx}\,dx$$

$$y_p = e^{-x}\int e^{2x}\int \underbrace{\sin 2x\,dx}\,dx$$

$$y_p = e^{-x}\int e^{2x}\cdot -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\underbrace{\int e^{2x}\cos 2x\,dx}_{\text{جزء به جزء}}$$

$$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

$$y = y_h + y_p$$

* روش اپراتور معکوس تنها مختص نوع خطی است.

* روش تغییر پارامتر لاگرانژ:

می‌خواهیم جواب خصوصی معادلهٔ زیر را به دست آوریم:

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=r(x)$$

فرض کنیم $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$ جواب عمومی همگن باشد. دنبال جوابی به شکل زیر هستیم:

$$y_p=u_1(x)\,y_1(x)+u_2(x)\,y_2(x)+\cdots+u_n(x)\,y_n(x)$$

$$\Rightarrow y_p=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\,y_i(x)$$

که $u_i(x)$ را حساب می‌کنیم:

ابتدا از دستگاه زیر $u_i'(x)$ ها را حساب می‌کنیم. سپس از آنها انتگرال گرفته u_i را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2+\cdots+u_n'y_n=0\\ u_1'y_1'+u_2'y_2'+\cdots+u_n'y_n'=0\\ \vdots\\ u_1'y_1^{(n-1)}+u_2'y_2^{(n-1)}+\cdots+u_n'y_n^{(n-1)}=r(x)\end{cases}$$

دستگاه را به روش کرامر حل می‌کنیم:

$$u_1'=\frac{\Delta u_1'}{\Delta}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=W(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

$$\Delta_{u_1'}=\begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n\\ 0 & y_2' & \cdots & y_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r(x) & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=W_1(y_1,y_2,\dots,y_n) \qquad \boxed{u_1'=\frac{W_1(y_1,\dots,y_n)}{W(y_1,\dots,y_n)}}$$

$$u_i'=\frac{W_i(y_1,\dots,y_n)}{W(y_1,\dots,y_n)} \qquad \boxed{u_i=\int\frac{W_i}{W}\,dx}$$

حالت خاص :

$$y''+P(x)\,y'+q(x)\,y=r(x)$$

$$y_n=c_1y_1+c_2y_2 \qquad \begin{cases} u_1=-\displaystyle\int \frac{y_2\,r(x)}{W}\,dx \\ u_2=\displaystyle\int \frac{y_1\,r(x)}{W}\,dx \end{cases}$$

روش حل: اگر y_1 معلوم باشد، از فرمول زیر y_2 را حساب کرده و سپس ادامه می دهیم

$$y_2=y_1\int \frac{1}{y_1^2}\,e^{-\int p\,dx}\,dx$$

* اگر ضریب y_n یک نبود ابتدا آنرا با استفاده از تقسیم ۱ می کنیم و سپس ادامه می دهیم.

مثال : $xy''+2y'+xy=\cot g\,x$ و $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{\cot g\,x}{x} \qquad y_2=y_1\int \frac{1}{y_1^2}\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$y_2=y_1\int \frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot e^{-\int \frac{2}{x}dx}\,dx=y_1\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx=\frac{\sin x}{x}\times \cot g\,x$$

$$y_2=\frac{-\sin x}{x}\times\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \boxed{y_2=\frac{-\cos x}{x}} \qquad \boxed{y_1=\frac{\sin x}{x}}$$

$$u_1'=\frac{W_1}{W} \qquad W\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & \dfrac{-\cos x}{x} \\ \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow W=\frac{x\sin^2 x+\sin x\cos x}{x^3}+\frac{x\cos^2 x-\sin x\cos x}{x^3}=\frac{x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{x^3}=\frac{1}{x^2}$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{-\cos x}{x} \\ \dfrac{\cot g\,x}{x} & \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2} \end{vmatrix}=\frac{\cos x}{x}\times\frac{\cot g\,x}{x}=\boxed{\frac{\cos^2 x}{x^2\sin x}}$$

3

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{\frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \qquad u_1 = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x} - \sin x\,dx$$

$$\boxed{u_1 = -\operatorname{Ln}\left|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x\right| + \cos x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \frac{\sin x}{x} & 0 \\ \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \frac{\operatorname{cotg} x}{x} \end{vmatrix} = \frac{\sin x \operatorname{cotg} x}{x^2} = \boxed{\frac{\cos x}{x^2}}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\frac{\cos x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \cos x \Rightarrow u_2 = \int \cos x\,dx = \boxed{\sin x}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$\int \sec dx = \operatorname{Ln}\left|\sec + \operatorname{tg}\right|$$

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\operatorname{Ln}\left|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x\right|$$