نام درس: جبر خطی عددی　　تعداد سؤال: تستی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

رشته تحصیلی-گرایش: علوم کامپیوتر　　زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه

کد درس: ۲۶۳۱۴۶　　تعداد کل صفحات: ۵

**«توجه: استفاده از ماشین حساب مجاز است»**

۱. کدام گزینه صحیح می‌باشد، یک ماتریس پایین مثلثی و یا بالا مثلثی

الف. اگر نامنفرد باشد آنگاه عناصر روی قطرش مخالف صفر است.

ب. اگر عناصر روی قطرش مخالف صفر باشد آنگاه نامنفرد است.

ج. الف و ب به طور همزمان برقرار است.

د. هیچکدام

۲. اگر روش حذفی گوس با محورگیری سطری مقیاس شده به کار رود آنگاه جواب دستگاه $Ax = b$ (A ثابت و m بردار مختلف b) تقریباً شامل چه تعداد عمل ضرب و تقسیم است؟

الف. $\frac{۱}{۳}n^۳$　　ب. $(\frac{۱}{۲}+m)n^۲$　　ج. $\frac{۱}{۲}n^۳-(\frac{۱}{۳}+m)n^۲$　　د. $\frac{۱}{۳}n^۳+(\frac{۱}{۲}+m)n^۲$

۳. کدام خاصیت زیر برای نرمها برقرار نمی‌باشد؟

الف. $\| ۰ \| = ۰$

ب. $\| x+y \| \geq \left| \| x \| - \| y \| \right|$

ج. $\| x+y \| \geq \| x \| + \| y \|$

د. $\| \sum_{i=۱}^{m} x^{(i)} \| \leq \sum_{i=۱}^{m} \| x^{(i)} \|$ برای بردارهای $x^{(۱)}, x^{(۲)}, \ldots, x^{(m)}$

۴. شرط اینکه معادله $Ax = \lambda x$، که در آن $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ ، $A \in M_{n\times n}$، $\lambda$ اسکالر می‌باشد، دارای جواب غیر بدیهی باشد معامل است با:

الف. $A - \lambda I$ بردار غیر صفر را به صفر بنگارد　　ب. $A - \lambda I$ منفرد است

ج. $\det(A - \lambda I) = ۰$　　د. هر سه مورد

۵. اگر $\lambda$ یک مقدار ویژه A و A نامنفرد باشد آنگاه:

الف. $\lambda^{-۱}$ یک مقدار ویژه $A$ است.　　ب. $\lambda^{-۱}$ یک مقدار ویژه $A^{-۱}$ است.

ج. $\lambda^{-۱}$ یک مقدار ویژه $A^{-۱}, A$ است.　　د. $\lambda^{-۱}$ یک مقدار ویژه $A^T$ است.

۶. کدام مورد صحیح نمی‌باشد؟

الف. روش توانی بزرگترین مقدار ویژه متناظر معادله $X^{(k+۱)} = AX^{(k)}$ را می‌دهد.

ب. روش توانی کوچکترین مقدار ویژه متناظر معادله $X^{(k+۱)} = AX^{(k)}$ را می‌دهد.

ج. روش توانی انتقال یافته دورترین مقدار ویژه به $\mu$ متناظر با معادله $X^{(k+۱)} = (A-\mu I)X^{(k)}$ را می‌دهد.

د. روش توانی معکوس انتقال یافته نزدیکترین مقدار ویژه به $\mu$ متناظر با معادله $(A-\mu I)X^{(k+۱)} = X^{(k)}$ را می‌دهد.



http://www.ab-rafiee.com

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی-گرایش: علوم کامپیوتر
کد درس: ۲۶۳۱۴۶

تعداد سئوال: تستی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵
زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه
تعداد کل صفحات: ۵

۷. طیف یک ماتریس $A$ ، $n\times n$

الف. در اجتماع n قرص $D_i=\{z\in \mathbb{C}:|z-a_{ii}|\le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\}1\le i\le n$ قرار دارد.

ب. در اشتراک n قرص $D_i=\{z\in \mathbb{C}:|z-a_{ii}|\le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\}$ قرار دارد.

ج. در اجتماع n قرص $D_i=\{z\in \mathbb{C}:|z-a_{ii}|<\sum|a_{ij}|\}$ قرار دارد.

د. در اشتراک n قرص $D_i=\{z\in \mathbb{C}:|z-a_{ii}|<\sum|a_{ij}|\}$ قرار دارد.

۸. فرض کنید ماتریس A به شکل افراز شده $A=\begin{bmatrix}B & C\\ 0 & E\end{bmatrix}$ باشد که $E,B$ ماتریسهای مربعی هستند آنگاه طیف A

الف. اشتراک طیف‌های $E,B$ است.
ب. اجتماع طیف‌های $E,B$ است.
ج. طیف C می‌باشد.
د. هیچکدام

۹. کدام مورد صحیح می‌باشد؟

الف. اگر T بالامثلثی و معکوس‌پذیر باشد، $T^{-1}$ نیز چنین است.
ب. اگر A بالاهسنبرگی و T بالامثلثی باشند. آنگاه AT و TA بالا هسنبرگی هستند.
ج. اگر T بالا مثلثی و AT بالا هسنبرگی باشند، آنگاه TA بالاهسنبرگی است.
د. همه موارد صحیح است.

۱۰. کدامیک از اعمال زیر به عنوان اعمال مقدماتی جهت بدست آوردن دستگاه هم ارز نمی‌باشد؟

الف. $E_i\leftrightarrow E_j$ ب. $E_iE_j\to E_j$ ج. $\lambda E_i\to E_i$ د. $E_i+\lambda E_j\to E_i$

۱۱. نامنفرد بودن ماتریس $n\times n$ مانند A معادل کدام گزینه نمی‌باشد؟

الف. دترمینان A مخالف صفر است.
ب. ستونهای A پایه‌ای برای $R^n$ تشکیل می‌دهند.
ج. برای هر $b\in R^n$ ، دقیقاً یک $x\in R^n$ وجود دارد که $Ax=b$
د. صفر یک مقدار ویژه A است.

۱۲. اگر ماتریس مربعی A پاد متقارن باشد $(A^T=-A)$ آنگاه:

الف. به ازای هر $x$ $x^TAx=0$
ب. به ازای هر $x$ $x^TAx\ge 0$
ج. به ازای هر $x$ $x^TAx\le 0$
د. مقدار و علامت $x^TAx$ بستگی به $x$ دارد.



http://www.ab-rafiee.com

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی-گرایش: علوم کامپیوتر
کد درس: ۲۶۳۱۴۶

تعداد سوال: تستی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵
زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه
تعداد کل صفحات: ۵

۱۳. کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

الف. در الگوریتم تجزیه LU ، ماتریس A حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی U و پایین مثلثی L تجزیه می‌شود.

ب. در الگوریتم تجزیه چولسکی، ماتریس حقیقی، متقارن و معین مثبت A به صورت $A = LL^T$ تجزیه می‌شود که L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت است.

ج. الگوریتم تجزیه چولسکی یک حالت خاص الگوریتم تجزیه LU است.

د. الگوریتم تجزیه چولسکی، ماتریس حقیقی، متقارن و نیمه معین مثبت (معین نامنفی) A را به صورت $A = LL^T$ تجزیه می‌کند که L یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت است.

۱۴. اگر K(A) عدد وضعیت ماتریس A باشد آنگاه:

الف. $K(\lambda A) = K(A)$ و $\lambda \neq 0$ ب. $K(\lambda A) = \lambda K(A)$

ج. $K(AB) = K(A)K(B)$ د. هیچکدام از موارد فوق صحیح نمی‌باشد.

۱۵. شرط لازم و کافی برای آنکه فرمول تکراری $x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + c$ به ازای هر بردار اولیه $x^{(0)}$ دنباله همگرایی $(I-G)^{-1}c$ را تولید کند آن است که:

الف. شعاع طیفی G کوچکتر از ۱ باشد. ب. شعاع طیفی G بزرگتر از ۱ باشد.

ج. شعاع طیفی G برابر ۱ باشد. د. شعاع طیفی G صفر باشد.

۱۶. در صورتی که $(\lambda_i)_{i=1}^n$ مقادیر ویژه A باشند، آنگاه اثر ماتریس $A^m$ عبارت است از:

الف. $m(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$ ب. $\prod_{i=1}^{m} \lambda_i$ ج. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m$ د. $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^m$

۱۷. متناظر با هر ماتریس A ..... ماتریس X با چهار خاصیت پنرز وجود دارد.

الف. حد اکثر یک ... ب. حداقل یک ...

ج. دقیقاً یک ... د. در صورتی که ماتریس A متقارن باشد یک ....

۱۸. اگر A و B ماتریسهای مربعی باشند،

الف. AB و BA مقادیر ویژه معکوس هم دارند.

ب. AB و BA مقادیر ویژه یکسان دارند.

ج. ممکن است در حالی که AB مقدار ویژه دارد BA هیچ مقدار ویژه‌ای نداشته باشد.

د. نمی‌توان نظری قطعی در مورد رابطه مقادیر ویژه AB و BA بیان نمود.



http://www.ab-rafiee.com

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی-گرایش: علوم کامپیوتر
کد درس: ۲۶۳۱۴۶

تعداد سوالات: تستی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵
زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه
تعداد کل صفحات: ۵

۱۹. اگر ماتریس A با تبدیل مشابه $P^{-1}AP$ قطری شود و B ماتریس دلخواهی باشد آنگاه مقادیر ویژه A+B

الف. در کوچکترین قرص با نمایش زیر قرار می‌گیرند: $\{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \le K_\infty(p) \| B \|_\infty\}$

ب. در بزرگترین قرص با نمایش زیر قرار می‌گیرند: $\{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \le K_\infty(p) \| B \|_\infty\}$

ج. در اشتراک قرصهای $\{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \le K_\infty(p) \| B \|_\infty\}$ قرار می‌گیرند.

د. در اجتماع قرصهای $\{\lambda \in C : |\lambda - \lambda_i| \le K_\infty(p) \| B \|_\infty\}$ قرار می‌گیرند که در آن $(\lambda_i)_{i=1}^n$ مقادیر ویژه A و $K_\infty(p)$ عدد وضعیت (حالت) P می‌باشد.

۲۰. مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ عبارت است از:

الف. $\lambda_۱ = ۴$ ، $\lambda_۲ = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ، $\lambda_۳ = \frac{۱}{۲}$

ب. $\lambda_۱ = ۴$ ، $\lambda_۲ = \frac{۱}{۲}$ ، $\lambda_۳ = \frac{-۱}{۲}$

ج. $\lambda_۱ = ۴$ ، $\lambda_۲ = \frac{\sqrt{۷}}{۲} i$ ، $\lambda_۳ = -\frac{\sqrt{۷}}{۲} i$

د. $\lambda_۱ = ۴$ ، $\lambda_۲ = \frac{-۱}{۲} - \frac{\sqrt{۷}}{۲} i$ ، $\lambda_۳ = \frac{-۱}{۲} + \frac{\sqrt{۷}}{۲} i$

## سوالات تشریحی

۱. تکرار مرتبه دوم $(X^{(۲)})$ گوس – سایدل دستگاه زیر را با $X^{(۰)} = (۰,۰,۰)^T$ بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۶ & -۲ \\ ۴ & -۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \\ X_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

۲. با استفاده از قرصهای گرشگورین بازه‌ای که مقادیر ویژه A در آن قرار دارند بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -۱+i & ۰ & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۴} & ۱ & \frac{۱}{۴} \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$



http://www.ab-rafiee.com

نام درس: جبر خطی عددی　　تعداد سؤال: تستی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

رشته تحصیلی-گرایش: علوم کامپیوتر　　زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه

کد درس: ۲۶۳۱۴۶　　تعداد کل صفحات: ۵

۳. یک تجزیه مقدار تکین برای ماتریس زیر بیابید. $\begin{bmatrix} ۰ & -۱/۶ & ۰/۶ \\ ۰ & ۱/۲ & ۰/۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ (با فرض $\sigma_۱ = ۱ , \sigma_۲ = ۲ , \sigma_۳ = ۰$)

۴. ثابت کنید اگر همه n کهاد اصلی پیشرو در ماتریس $A$، $n \times n$ نامنفرد باشند آنگاه A یک تجزیه LU دارد.

۵. اگر در $A^{-۱}$ اختلال ایجاد شود یک ماتریس جدید B به دست می‌آید، آنگاه در جواب $x = A^{-۱}b$ نیز اختلال ایجاد خواهد شد و بردار جدید $\tilde{x} = Bb$ به دست خواهد آمد. این اختلال اخیر به طور مطلق و به طور نسبی تا چه اندازه بزرگ است؟



http://www.ab-rafiee.com