به نام خدا

پاسخ سؤالات تستی

«با تشکر از استاد محترم آقای مهندس ...»

ریاضی مهندسی (ترم دوم ۹۳-۹۲)

---

① ریشه معادله

$$z^4-1=i \Rightarrow z^4=i+1 \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \theta=\frac{\pi}{4} \\ |z|=r=\sqrt{2} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{به وسیله قضیه اویلر}} Z=(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{4}\right)$$

$$\text{یکی از ریشه‌ها} \Longrightarrow Z=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

گزینه الف ✓

---

② حاصل

$$\underbrace{(1-i)}_{z}{}^{16} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \theta=-\frac{\pi}{4} \\ r=\sqrt{2} \end{array} \xrightarrow{\text{اویلر}} z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\Rightarrow z^{16}=(\sqrt{2})^{16}\left(\cos\left(-\frac{16\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{16\pi}{4}\right)\right)=2^8\left(\underbrace{\cos 4\pi}_{1}-\underbrace{i\sin 4\pi}_{0}\right)=256$$

گزینه ب ✓

---

③ ج

$$f(z)=z\,Re(z) \Rightarrow (x+iy)(x)=\underbrace{x^2}_{u}+i\underbrace{xy}_{v}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial x}=2x & \text{و} & \frac{\partial v}{\partial y}=x \\ \frac{\partial u}{\partial y}=0 & & \frac{\partial v}{\partial x}=y \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{کوشی ریمان}]{\text{طبق}} \begin{array}{l} 2x=x \\ 0=-y \end{array} \rightarrow \text{فقط در } z=0 \text{ مشتق دارد}$$

$$f'(0)=\lim_{z\to(x,0)}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim\frac{x^2-0}{x-0}=0$$

گزینه الف ✓

$$f'(0)=\lim_{z\to(0,y)}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim\frac{0-0}{0-0}=0$$

* نکته: تابع مذکور، تحلیلی نیست.

ادامه صفحه‌ی بعد

۴) مزدوج همساز مقابل؟

$$u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$$

معادلات کوشی ریمان

$$\begin{cases} u_x = v_y \longrightarrow 6xy + 4x \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\int} 3xy^2 + 4xy + C(x) = v \\ v_x = -u_y \longrightarrow 3y^2 + 4y + C'(x) = -(3x^2 - 3y^2 - 4y) \Rightarrow C'(x) = -3x^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\int} C(x) = -x^3$$

$$\text{پس} \Rightarrow \underline{\underline{v = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c}}$$

گزینه ج ✓

---

۵) جواب معادله:

$$e^{z} = -4 \xrightarrow{\text{از طرفین } Ln} Ln(e^{z}) = Ln(-4)$$

$$\Rightarrow z = Ln(-4) \xrightarrow{\text{طرف دوم}} Ln|-4| + i\arg z \rightarrow \arg z = tg^{-1}\frac{y}{x} = \frac{0}{-4} =$$

$$\arg z \Rightarrow (2k+1)\pi$$

$$\Longrightarrow Ln(4) + (2k+1)\pi i \qquad k \in Z$$

گزینه الف ✓

---

۶) مقدار اصلی مقابل:

$$Ln(-1) = \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \arg z = (2k+1)\pi i$$

$$\Rightarrow Ln|-1| + i\arg z = \underbrace{Ln(1)}_{0} + i\arg(2k+1)\pi i \xrightarrow{k=0} \pi i$$

گزینه ب ✓

---

۷) نگاشت $\frac{1}{z}$: دایره گذرا از مبدأ را به خط راست غیرگذرا از مبدأ تبدیل می‌کند.

"عکس این موضوع نیز برقرار است"

گزینه ب

---

۸) حاصل انتگرال:

$$\oint_c \frac{e^z}{\cos z} dz \qquad c: |z| = 1$$

$$\xrightarrow{\text{تکین مخرج}} \cos z = 0 \longrightarrow z = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, (2n-1)\frac{\pi}{2}$$ ← خارج از دایره واحد

$$\xrightarrow{\text{پس}} \oint_c f(z)\, dz = 0 \qquad \boxed{\pi = 3.14 \text{ مقدار}}$$

گزینه الف ✓

۹) حاصل تقابل؟

$$\oint_c \frac{\operatorname{ch} z}{z^2-2z}\,dz \qquad C:|z|=1$$

$$\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{نقاط تکین}} z(z-2)=0 \begin{cases} z=0 \longrightarrow \checkmark \ \text{درمحدوده} \\ z=2 \quad \times \end{cases} \Rightarrow \oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\left[\frac{\operatorname{ch} z}{z-2}\right]_{z=0}$$

$$\Longrightarrow 2\pi i\left(\frac{1}{-2}\right) = -\pi i$$

گزینه ج

---

۱۰) حاصل تقابل؟

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13+12\cos\theta} \Longrightarrow \begin{cases} d\theta = \dfrac{dz}{iz} \\ \cos\theta = \dfrac{(z+z^{-1})}{2} \end{cases}$$

گزینه د

$$\Rightarrow \oint_0^{2\pi}\frac{dz}{13iz+6iz\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \oint_0^{2\pi}\frac{dz}{13iz+6iz^2+6i} = \frac{1}{i}\oint_0^{2\pi}\frac{dz}{\underbrace{6z^2+13z+6}_{\text{تجزیه می‌کنیم}}} =$$

$$\to \frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{dz}{(3z+2)(2z+3)} \Rightarrow \begin{cases} z=-\frac{2}{3} \longrightarrow \text{درمحدوده دایره واحد} \\ z=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \oint f(z)\,dz = \frac{1}{i}\times 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\right) = 2\pi\left[\frac{1}{2z+3}\right]_{-\frac{2}{3}} = \frac{6\pi}{5}$$

---

۱۱) حاصل تقابل؟

$$\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}}\,dz \quad \xrightarrow{\text{بسط لوران}} e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots$$

$$\text{پس} \Rightarrow z^2 e^{\frac{1}{z}} = z+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{6z}}_{\text{(مانده)}\ \frac{1}{6} \Leftarrow \text{ضریب}\ \frac{1}{z}}+\cdots \qquad \oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi i}{3}$$

گزینه ب

---

۱۲) گزینه الف

راه‌حل کامل در فصل ۵ کتاب آمده است. (نمونه آن در بخش تمارین آخر فصل ۵)

---

۱۳) گزینه ب

تصویر خط تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ تبدیل به دایره می‌شود.

$$\underbrace{w_1 = \frac{1}{z-2-i}}_{\text{معکوس و انتقال}} + \underbrace{w_2 = 4z-1}_{\text{انبساط و انتقال}} \ \xRightarrow{\text{ترکیب}}\ \underbrace{w_3 = w_1 w_2}_{\text{دوران}}$$

۱۴) نگاشت قابل؟

$$\left.\begin{array}{lcl} Z_1=\infty & & w_1=0 \\ Z_2=i & \xrightarrow{\text{تبدیل}} & w_2=i \\ Z_3=0 & & w_3=\infty \end{array}\right\} \quad \frac{(w-0)(i-\infty)}{(w-\infty)(i-0)}=\frac{(z-\infty)(i-0)}{(z-0)(i-\infty)}$$

∞ فرض ⇒ $\frac{1}{t}$ تغییر متغیر

$$\frac{w(i-\frac{1}{t})}{(w-\frac{1}{t})i}=\frac{(z-\frac{1}{t})i}{z(i-\frac{1}{t})}\Longrightarrow\frac{wit-w}{wit-i}=\frac{zit-i}{zit-z}\xrightarrow{t=0}$$

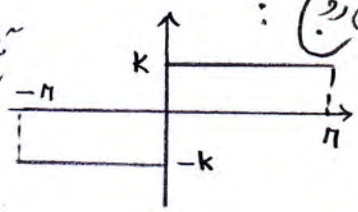
$$\frac{w}{i}=\frac{-i}{-z}\Rightarrow w=\frac{i^2}{z}=-\frac{1}{z}$$

گزینه د

---

۱۵) ضرائب b_n برای nهای زوج:

$$f(x)=\begin{cases}-k & -\pi<x<0\\ k & 0<x<\pi\end{cases}\longrightarrow \text{تابع فرد}$$



$a_0=a_n=0$ تابع فرد

$L=\pi$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi k\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2k}{n\pi}\Big[-\cos nx\Big]_0^\pi=\frac{2k}{n\pi}\Big[-(-1)^n+1\Big]\Longrightarrow\begin{cases}\frac{4k}{n\pi} & n \text{ فرد}\\ 0 & n \text{ زوج}\end{cases}$$

* یادآوری $\cos n\pi=(-1)^n$

گزینه د

---

۱۶) سری فوریه متقابل:

$f(x)=x$, $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

⟹ از سری فوریه داده شده مشتق می‌گیریم $\Rightarrow 2x=\frac{4n}{n^2}(-1)(-1)^n\sum\sin nx\xrightarrow{\text{ساده}}$

$$x=-2\sum\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$$

گزینه الف

---

۱۷) فوریه سینوسی متقابل:

$f(x)=x-1 \quad (0,1) \Longrightarrow a_0=a_n=0$, $L=1$

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1(x-1)\sin n\pi x\,dx$$

$$=\left[\frac{x-1}{-n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_0^1=\frac{1}{n\pi}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum\frac{\sin n\pi x}{n}\ \checkmark$$

مشتق	انتگرال
$x-1$	$\sin n\pi x$
1	$-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$
0	$-\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$

گزینه ب

صه ۵

۱۸) گزینه الف درست — سری فوریه تابع $f(x)=k$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ خودش می‌شود.

---

۱۹) انتگرال فوریه تابع؟

$$f(x)=e^{-x} \qquad x>0 \rightarrow (0,\infty)$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\cos\alpha x\, dx \xrightarrow[(0,\infty)]{\text{لاپلاس}} \frac{1}{\pi}\cdot L\{\cos\alpha x\}\Big|_{s=1}=\frac{1}{\pi(\alpha^2+1)}$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\sin\alpha x\, dx \xrightarrow[(0,\infty)]{\text{لاپلاس}} \frac{1}{\pi}\cdot L\{\sin\alpha x\}\Big|_{a=\alpha}=\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^{\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x+\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+1}d\alpha$$

گزینه الف درست.

---

۲۰) تبدیل فوریه تابع؟

$$f(x)=x \qquad x>0$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x e^{-i\alpha x}$$

$\frac{d}{dx}$	$\int$
x	$e^{-i\alpha x}$
1	$-\frac{1}{i\alpha}e^{-i\alpha x}$
0	$\frac{1}{i^2\alpha^2}e^{-i\alpha x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-x}{i\alpha}e^{-i\alpha x}+\frac{1}{\alpha^2}e^{-i\alpha x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

گزینه ج درست.

(نکته) راه سریع‌تر:

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-sx}dx \overset{\text{لاپلاس}}{=} \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty}xe^{-i\alpha x}dx \xrightarrow[n=1]{s=i\alpha} \frac{1}{i^2\alpha^2}=\frac{-1}{\alpha^2}\ \checkmark$$

---

۲۱) جواب عمومی معادله مقابل؟

$$u_{xx}+8u_{xy}+15u_{yy}=0$$

$$\Rightarrow m^2+8mn+15n^2=0 \Rightarrow (m+5n)(m+3n)=0 \qquad \begin{cases} m=-5n \\ m=-3n \end{cases}$$

$$e^{mx+ny} \rightarrow e^{-5nx+ny}=e^{n(y-5x)}$$

$$e^{mx+ny} \rightarrow e^{-3nx+ny}=e^{n(y-3x)}$$

$$u=F(y-3x)+G(y-5x)$$

گزینه د

۲۲) تغییر متغیر معادله مقابل ؟

$$U_{xx}+3U_{xy}+2U_{yy}=0 \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=2 \end{cases} \qquad B^2-4AC=1>0$$ هذلولوی

$$\underbrace{A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\left(\frac{dy}{dx}\right)+C=0}_{\text{معادله فرم کلی (مشخصه)}} \Longrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3\frac{dy}{dx}+2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=p \xrightarrow[\text{پس}]{\text{فرض}} p^2-3p+2=0 \Longrightarrow (p-1)(p-2)=0 \begin{cases} p=1 \\ p=2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{پس}} \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=1 \Rightarrow dy=dx \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\int} y=x \Longrightarrow \beta=y-x \\ \dfrac{dy}{dx}=2 \Longrightarrow dy=2dx \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\int} y=2x \Longrightarrow \alpha=y-2x \end{cases}$$

گزینه الف

---

۲۳) معادله گرمای یک بعدی سهمی‌وار است.

$$U_t=c^2U_{xx}$$

گزینه ج

$$A=0\ ,\ B=0\ ,\ C=-c^2 \Longrightarrow B^2-4AC=0$$ سهمی‌گون یا سهموی

---

۲۴) روش دالامبر برای حل معادله موج ۱ بعدی است.

گزینه الف

---

۲۵) جواب خصوصی معادله مقابل؟

$$U_x=U_y$$

جوابهای داده شده را امتحان می‌کنیم:

$$U=x+y \quad \begin{cases} U_x=1 \\ U_y=1 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$U=\sin(x+y) \quad \begin{cases} U_x=\cos(x+y) \\ U_y=\cos(x+y) \end{cases} \quad \checkmark$$

* هر ۳ صحیح می‌باشد.

گزینه د

$$U=\operatorname{sh}(x+y) \quad \begin{cases} U_x=\operatorname{ch}(x+y) \\ U_y=\operatorname{ch}(x+y) \end{cases} \quad \checkmark$$

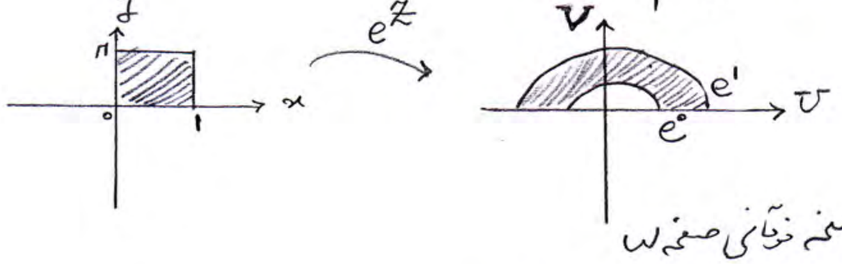
پاسخ سؤالات تشریحی

ریاضی مهندسی
ترم دوم ۹۳-۹۲

① تصویر مستطیل مقابل تحت نگاشت $w=e^{z}$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le \pi\end{cases} \xrightarrow{e^{z}} e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}\Rightarrow Re^{i\theta}\quad \begin{cases}R=e^{x}\\ y=\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}e^{0}\le R\le e^{1}\\ 0\le \theta\le \pi\end{cases}$$



نیم صفحه فوقانی صفحه w
ناحیه بین دو نیم دایره e^{1} و $e^{0}=1$

② حل انتگرال مقابل؟

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2}}{x^{4}+1}\,dx$$ «انتگرال زوج است» ، ۲+ درجه صورت $\le$ درجه مخرج ✓ برقرار

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(z_k)\right) \to \text{if}\,(z_k>0 \to \text{بالای محور } x)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{2}}{z^{4}+1}\,dz \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تعیین}} \left|\begin{array}{l} z^{4}+1=0\\ \underbrace{z^{4}=-1}_{r=1,\ \theta=\pi}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} z=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)\\ k=0,1,2,3\\ k=0,1 \xRightarrow[\text{برقرار}]{} \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}_{e^{\frac{\pi}{4}i}},\ \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}_{e^{\frac{3\pi}{4}i}}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{روش } \frac{p}{q'} \text{ برقرار}} 2\pi i\left(\frac{z_k^{2}}{4z_k^{3}}\right)=\frac{\pi i}{2z_k} \xrightarrow{\text{پس}} \frac{\pi i}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}+e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi i}{2}\left[\left(\cos(-\tfrac{\pi}{4})+i\sin(-\tfrac{\pi}{4})\right)+\left(\cos(-\tfrac{3\pi}{4})+i\sin(-\tfrac{3\pi}{4})\right)\right]=\frac{\pi i}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi i}{2}\left(-2i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

* جوابی که من بدست آوردم این بوده که فکر کنم درست باشد. اگر شما جواب دیگری بدست آورده اید برای من هم لطفاً بفرستید تا یاد بگیرم.

۳) سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ ، $-\pi<x<\pi$

و پس حاصل $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$T=2\pi \to L=\pi$ ، "تابع زوج" $\to b_n=0$

الف)

$$\circledast\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-0\right)=\frac{2\pi^2}{3}$$

$\frac{d}{dx}$	$\int_x$
x^2	$\cos nx$
$2x$	$\frac{1}{n}\sin nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^3}\sin nx$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}\underbrace{\sin n\pi}_{0}+\frac{2\pi}{n^2}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}-\frac{2}{n^3}\underbrace{\sin n\pi}_{0}\right]-[0]=\left(\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n\right)\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\circledast\ f(x)=\frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2}+\sum\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{\pi}\ \underset{\text{ساده}}{=}\ \boxed{\frac{\pi^2}{3}+4\sum\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}}$$

ب)

$$\circledast\ \sum\frac{1}{n^2}=?$$

$$\xrightarrow[x=\pi]{\text{پس از}} f(\pi)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\frac{(-1)^n\overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n}}{n^2}\Rightarrow\frac{\pi^2}{3}+4\sum\frac{\overbrace{(-1)^{2n}}^{=1}}{n^2}$$

$$\xrightarrow[\text{۲) و } f(x)=x^2 \text{ صورت مسئله}]{\text{از طرفی ۲ — ۱) با استفاده از قضیه دیریکله}}\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{\pi^2+\pi^2}{2}=\pi^2\ \longleftarrow\ \text{توجه: } \pi \text{ نقطه شکستگی}$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین برابر هم}]{\text{پس}}\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\frac{1}{n^2}\Rightarrow\frac{\pi^2-\frac{\pi^2}{3}}{4}=\sum\frac{1}{n^2}\to\frac{\pi^2}{6}$$

۴) حل مسئله گرمای زیر به روش جداسازی متغیرها

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \quad (1) & 0<x<\pi \rightarrow \boxed{L=\pi} \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \quad (*) & \\ u(x,0)=\sin x \quad (2) & \end{cases}$$

حل) $u(x,t)=F(x)G_n(t)$ (**)

$$\begin{cases} u_t = F(x)\dot{G}_n(t) \\ u_{xx} = F''(x)G_n(t) \end{cases} \xrightarrow[\text{رابطه } (1)]{\text{جایگذاری در رابطه اصلی}} \begin{cases} F\dot{G}_n = c^2 F'' G_n \\ \Rightarrow \underbrace{\dfrac{F''}{F} = \dfrac{\dot{G}_n}{c^2 G_n} = -p^2} \end{cases}$$

۱. معادله ضریب ثابت +
۲. معادله کوشی که حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} F''+Fp^2=0 \xrightarrow[\text{ثابت}]{\text{معادله ضریب}} r^2+p^2=0 \rightarrow r=\pm pi \\ \Rightarrow F(x)=A\cos px + B\sin px \\ F(0) \Rightarrow A=0 \rightarrow F(x)=B\sin px \longrightarrow \overset{\text{از } (*) \text{ داده شده}}{F(L)=0} \rightarrow \sin pL=0 \rightarrow \underbrace{p=\frac{n\pi}{L}}_{L=\pi} \\ \rightarrow p=n \xrightarrow[B=1]{\text{فرض}} F(x)=\sin nx \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{G}_n + n^2c^2G_n = 0 \xrightarrow{\text{معادله کوشی}} r^1+n^2c^2=0 \rightarrow r=-n^2c^2 \\ \longrightarrow G_n(t) = \underbrace{C}_{A_n} e^{-n^2c^2 t} \quad (4) \end{cases}$$

n^2c^2 ↕ «جایگذاری p در معادله»

$$\xrightarrow[\text{در } (**)]{\text{جایگذاری } G \text{ و } F} \quad u(x,t) = \sum \underbrace{A_n e^{-n^2c^2t}}_{G_n(t)} \underbrace{\sin nx}_{F(x)} \quad (5)$$

و با استفاده از اصل برهم‌نهی

$$\xrightarrow[\text{از } (2)]{\text{با بررسی شرایط مسئله}} u(x,0)=\sin(x) \xrightarrow[t=0]{\text{و با استفاده از } (5)} \sum A_n \sin nx$$

سری فوریه سینوسی

$$\rightarrow A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \xrightarrow[\text{از } (2)]{f(x)=\sin x} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin nx\,dx$$

* نکته:

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

پس در اینجا: $m=1$ ⟸ فقط $n=1$ جواب دارد و مابقی A_nها صفر است.

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{1 = A_1}$$

$$\xRightarrow{\text{پس از } (5)} u(x,t) = \sum A_n e^{-n^2c^2t}\sin nx \xRightarrow[A_1=1]{n=1} \boxed{e^{-c^2t}\sin x} \checkmark$$

چند نکته برای مطالعه درس ریاضی مهندسی:

۱- همیشه اول هر ترم منابع درسی جدید را از سایت پیام نور دریافت کنید، ممکن است منبع درسی (کتاب) تغییر کرده باشد، یا حذفیاتی اضافه یا کم شده باشد.

۲- مراحل زیر را برای مطالعه یک درس (خاصه ریاضی مهندسی) منظور کنید:

یادگیری مطالب اصلی درس ← حل تمارین و پرسش‌های پایان هر فصل (۱۰۰٪) ← مرور و حل **۸-۹** سری سؤالات پایان‌ترم های قبل (حتماً سؤالات امتحان تستی و تشریحی را کامل حل کنید. چون برخی تستی‌ها، در امتحانات دیگر، به‌صورت تشریحی پرسش شده و نیز برعکس.)

- سعی کنید از روش خلاصه‌نویسی، نت‌برداری استفاده کنید (فوق‌العاده مؤثر است، مخصوصاً برای دروس خود خوان)
- حتماً یک برنامه منظمِ مطالعه درسی را هنگام شروع ترم و آغاز به یادگیری کتاب، برای خود بنویسید.این راه بسیار مفید است. با هر بار مطالعه انجام‌شده،آن را علامت بزنید.مثلاً:

فصل	نام فصل	مطالعه اصلی	مرور اول	مرور دوم	مرور سوم	مرور چهارم	جمع‌بندی نهایی
۱	**اعداد مختلط**	**۱۱/۵ تا ۱۱/۱۲**	**۱۱/۲۰ تا ۱۱/۲۲**	**۱۲/۵ تا ۱۲/۶**	.	.	.
۲	**متغیرهای مختلط**	**۱۱/۱۳ تا ۱۱/۲۶**	**۱۲/۲ تا ۱۲/٤**	**۱۲/۱۵ تا ۱۲/۱۷**	.	.	.
۳	**توابع غیر جبری**	**۱۱/۲۷ تا ۱۲/۱٤**	**۱۲/۲۱ تا ۱۲/۲۳**	.	.	.	.
٤	**انتگرال مختلط**	.	.	.	.	.	.
۵	**سری‌ها، مانده‌ها**	.	.	.	.	.	.
۶	**نگاشت همدیس**	.	.	.	.	.	.
۷	**سری فوریه**	.	.	.	.	.	.
۸	**انتگرال فوریه**	.	.	.	.	.	.
۹	**مشتقات جزئی**	.	.	.	.	.	.

- مرورهای منظم با فاصله زمانی مناسب را برای درس‌های خوانده شده قبلی، کنار مطالعه اصلی داشته باشید.(مثل جدول بالا). تثبیت آموخته‌ها با هر بار مرور، بیشتر می‌شود.
- به نظر می‌رسد به‌طور متوسط، ۲-۳ بار برای این درس مرور کردن لازم است. البته حتماً یک مرور کلیِ (جمع‌بندیِ نهایی) حداقل یک‌هفته‌ای، قبل از امتحان باید داشت.
- در هر بار مرور (مخصوصاً مرورهای آخر)، بهتر است مطالب کلیدی، (مثل فرمول‌ها، روابط کاربردی مهم) یا مطالبی که در ذهن، دشوارتر تثبیت می‌شود را در برگه‌ای بنویسیم تا در جمع‌بندی نهایی آن‌ها را بازهم جداگانه مرور نمائیم.(فوق‌العاده مؤثر)

بر خود لازم می‌دانم از استاد عزیز، جناب آقای مهندس بصیری، استاد محترم دانشگاه پیام نور ری، کمال قدردانی و سپاسگزاری را داشته باشم. در صورت تمایل نظرات و پیشنهادات خود را ارسال فرمایید.

دانشجوی نرم‌افزار واحد ری Saba.Didar@Mailfa.org